Leyes de Maxwell

Jordi Bonastre Muñoz

PID_00159138

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

Este módulo está dedicado a las ondas electromagnéticas. Los fenómenos asociados a las ondas electromagnéticas los podéis encontrar manifestados de muchas maneras, y la luz es el ejemplo más característico. Otros ejemplos de aplicaciones de las ondas electromagnéticas son la emisión y sintonización de señales de radio o televisión, las redes sin hilos, los rayos X que nos permiten realizar radiografías o la radiación solar que llega a la Tierra. Todos ellos se basan en el uso de diferentes tipos de ondas electromagnéticas.

En los apartados 1 y 2 de este módulo haremos un repaso de los conceptos clave de la electrostática y el magnetismo que ya introdujimos en otras asignaturas. Por otra parte, no nos limitaremos a hacer un resumen, sino que aprovecharemos para introduciros algunos conceptos y puntos de vista nuevos y algunas herramientas matemáticas que emplearemos más adelante.

En el apartado 3 deduciremos y analizaremos las leyes de Maxwell como una generalización de todas las propiedades y características de los campos eléctrico y magnético que introdujimos en las dos primeras secciones. A partir de estas leyes discutiremos el electromagnetismo como una sola interacción.

Para acabar, en el apartado 4 entraremos en la definición del concepto clave del módulo: las ondas electromagnéticas. En efecto, comprobaremos que su existencia y sus características se deducen de forma directa a partir de las leyes de Maxwell.

Objetivos

Los materiales didácticos contenidos en este módulo proporcionan los conocimientos necesarios para que el estudiante alcance los objetivos siguientes:

1. Completar el conocimiento de los conceptos clave de electrostática que ya se han introducido en otras asignaturas.

2. Completar el conocimiento de los conceptos clave de magnetostática e inducción magnética que ya se han introducido en otras asignaturas.

3. Entender el comportamiento de los campos eléctrico y magnético en presencia de medios materiales y su tratamiento.

4. Conocer el operador nabla y las herramientas matemáticas que lo utilizan: gradiente, divergencia y rotacional. Entender su significado matemático y físico.

5. Conocer las leyes de Maxwell y su relación con las leyes que se han tratado durante el estudio de los campos eléctrico y magnético. Saber interpretar su significado físico como explicación de los campos eléctrico y magnético y de la interrelación entre ambos.

6. Entender el concepto de onda electromagnética como un flujo de energía que se intercambia entre el campo eléctrico y el campo magnético y que se propaga por el espacio.

7. Identificar las analogías y diferencias respecto a las ondas mecánicas que se han estudiado en otros módulos.

1. Repaso de electromagnetismo: electrostática

La carga eléctrica es una propiedad de algunas partículas elementales que forman la materia. Cualquier partícula que presenta carga eléctrica ejerce una influencia sobre otras partículas con carga que se encuentran a su alrededor.

Carga eléctrica

Las unidades de cuantificación de la carga eléctrica indivisibles son la carga del protón y del electrón:

$$q = \pm 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Toda carga eléctrica debe ser un múltiplo entero de este valor.

Podéis hacer una analogía con lo que sucede si os imagináis un colchón con una serie de pequeños objetos encima suficientemente ligeros como para no deformarlo. De repente, colocamos un objeto masivo, como una bola de hierro, por ejemplo. La bola deformará el colchón de tal manera que los pequeños objetos que antes se mantenían en reposo comenzarán a "caer" hacia ella. Es como si la bola hubiese modificado las propiedades de la región que la envuelven y los objetos que se encuentran en ella se ven afectados por esta modificación.

De la misma manera que la bola ha modificado las propiedades del colchón donde se encontraba, una carga eléctrica también "modifica" el espacio que la rodea. En este caso, las que se ven afectadas son las cargas eléctricas que se encuentran bajo su región de influencia.

En la figura 1 podéis visualizar un ejemplo de cómo el hecho de colocar una carga *q'* en un cierto punto provoca un efecto sobre otras cargas que ya se encuentran en la región de alrededor. Es como si la carga "intrusa" hubiese alterado las propiedades del espacio que lo envuelve. Lo que sucece es que la carga genera un **campo eléctrico** y que las cargas que lo envuelven se ven afectadas por él. En concreto, las cargas experimentan una fuerza con la misma dirección que el campo y proporcional a su módulo.

Figura 1

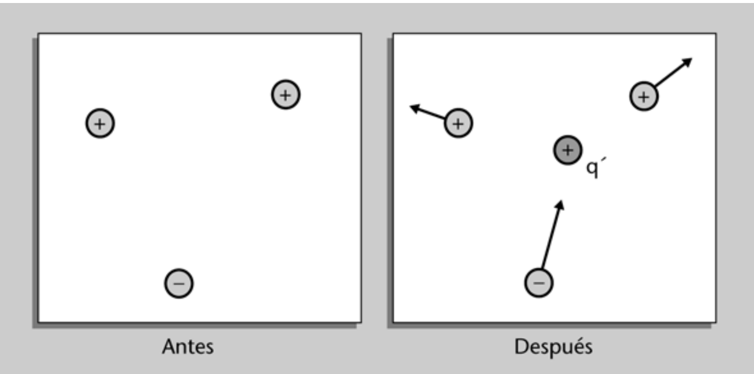


Figura 1

Explicación del concepto de campo eléctrico como una alteración de las propiedades del espacio.

El efecto que os hemos mostrado en los dibujos se produce, en mayor o menor medida, para cualquier carga y en cualquier punto del espacio.

Observación

De hecho, las cargas que ya existían antes de la "intrusión" también generan su respectivo campo eléctrico y, por tanto, afectan al resto, incluida la carga "intrusa". En la figura hemos obviado este último aspecto por motivos pedagógicos.

Así, en este apartado detallaremos el concepto de campo eléctrico y sus efectos sobre las regiones del espacio a las que afecta y sobre la materia que se encuentra bajo su influencia. Por ahora nos centraremos solo en el caso concreto de campos eléctricos generados por cargas en reposo, que se denominan **campos**

electrostáticos, y dejaremos para más adelante el estudio de los campos generados por cargas en movimiento, que presenta más dificultad.

En el primer subapartado estudiaremos las características de los campos electrostáticos sin la presencia de ningún medio material. Centraremos el texto sobre todo en el concepto de líneas de campo y de flujo de campo.

En el segundo subapartado estudiaremos la energía asociada a los campos electrostáticos mediante el concepto de potencial electrostático. Lo haremos introduciendo una nueva herramienta matemática, el gradiente, que nos permitirá expresar directamente la relación entre los conceptos de campo y de potencial.

1.1. Campo electrostático en el vacío

Como ya hemos dicho, un campo electrostático es aquel que es generado por cargas en reposo. La característica más importante de los campos de este tipo es que mantienen las mismas características a lo largo del tiempo.

Recordad

La fuerza y el campo electrostáticos tienen la misma dirección y, además, sus módulos son proporcionales. Por tanto, si se conocen las características del campo electrostático en un punto, podemos conocer cómo será la fuerza experimentada por una carga que se encuentre en él.

En este apartado estudiaremos el campo eléctrico, donde las cargas eléctricas pueden ser de dos tipos: positivas y negativas. Esto signfica que habrá dos tipos de comportamiento en presencia de un campo eléctrico.

La unidad de medida de las cargas eléctricas es el **coulomb**, que se representa con la letra **C**; y la unidad del campo eléctrico es el **newton por coulomb**, que se representa con **N/C**, aunque a menudo también se emplea el V/m, (voltios por metro).

No obstante, en la vida cotidiana la mayoría de las fuentes de generación de campo eléctrico no son puntuales, sino que las solemos encontrar agrupadas en un cierto número.

El **principio de superposición** establece que el efecto combinado de distintas fuentes de creación de campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r})$, es la suma de los efectos producidos por cada una de ellas por separado $\vec{E}_i(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}) \qquad (1)$$

Y si lo que queremos determinar es el campo generado por una distribución continua Γ *, debemos convertir la distribución discreta en una distribución continua y, en consecuencia, sustituir las sumas por integrales:

* Γ se lee "gamma".

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} d\vec{E} \qquad (2)$$

donde $d\vec{E}$ es el campo creado por un diferencial de carga.

El conocimiento de la magnitud del campo eléctrico en un punto es muy importante, ya que permite determinar en cualquier momento la fuerza que experimentaría una carga ubicada en él sin necesidad de conocer quién genera esta fuerza ni de calcularla en cada ocasión. En otras palabras, la expresión del campo electrostático para una región contiene toda la información necesaria (módulo o intensidad, dirección y sentido) para deducir de manera inmediata la fuerza electrostática y, por tanto, el comportamiento de una futura carga que se ubicase en un punto de la región.

Por lo tanto, debemos buscar un modo de representar de manera rápida, simple y eficaz cómo es el campo eléctrico en una región. Un modo muy claro es mediante las líneas de campo, que veremos a continuación.

1.1.1. Líneas de campo

Las líneas de campo son una representación gráfica de la magnitud del campo eléctrico en una región del espacio. Las gráficas permiten, con una simple observación, deducir de forma directa la dirección, el sentido y la intensidad (de manera cualitativa) del campo eléctrico en cualquier punto dentro de la región representada. Por otra parte, su conocimiento nos permite saber cómo es el comportamiento electrostático, es decir, cómo será la fuerza experimentada por una carga situada en un punto de esta región.

Figura 2

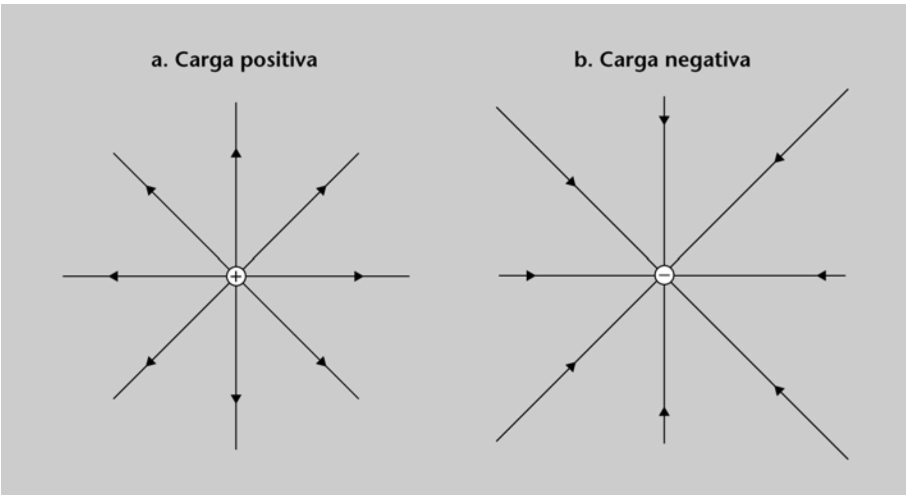


Figura 2

La figura muestra las líneas de campo generadas por una carga puntual de signo positivo (**a**) y de signo negativo (**b**).

La figura 2 muestra, a modo de ejemplo, las líneas de campo generadas, de forma separada, por una carga puntual positiva (a) y por una negativa (b). Como podéis ver, ambas presentan una distribución de líneas de campo idénticas, a excepción del sentido de las fuerzas. Las líneas de campo comienzan sobre la carga positiva y se extienden hasta el infinito o hasta otra carga situada fuera de la región representada. Para el caso de la carga negativa, el efecto es al revés: las líneas “vienen” del infinito, o de hipotéticas cargas positivas situadas fuera del dibujo, y acaban en la posición de la carga negativa.

Por otro lado, la figura 3 muestra las líneas de campo generadas por dos cargas puntuales situadas muy cerca una de la otra para cuatro casos diferentes:

Figura 3

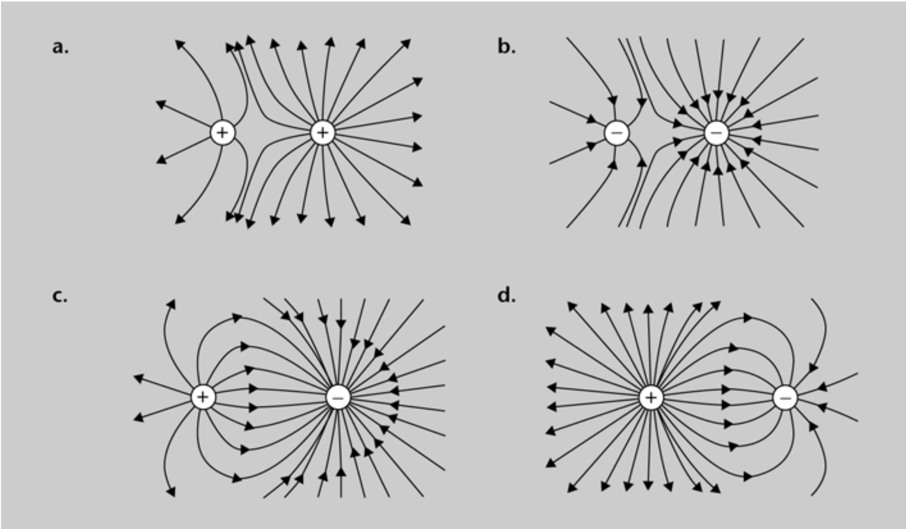


Figura 3

La figura muestra la distribución de las líneas de campo para el caso de dos cargas puntuales en los casos en los que:

a. ambas son positivas,

b. ambas son negativas,

c. las dos cargas son de signo diferente y la positiva es de menor valor,

d. las dos cargas son de signo diferente y la positiva es de mayor valor.

- **Las dos cargas son positivas** (figura 3a). Es interesante destacar que existe una región entre las dos cargas donde las líneas de campo están muy separadas. Esto se debe a que en estos puntos las fuerzas causadas por ambas cargas se compensan mutuamente (una "tira" hacia la derecha y la otra, hacia la izquierda) y, por tanto, el campo electrostático resultante es mínimo. De hecho, existe un punto (ubicado en la recta que une las dos cargas) donde la compensación es total y el campo es cero. También hay que destacar que de la carga de la derecha salen muchas más líneas, hecho que denota que su valor es mayor.

- **Las dos cargas son negativas** (figura 3b). En el ejemplo de la figura, las dos cargas son del mismo valor que en el caso anterior (figura 3a) pero de signo opuesto. Podéis comprobar que las líneas de campo son idénticas en ambos casos, a excepción de su sentido.

- **Las dos cargas son de signo diferente** (figura 3c y figura 3d). La diferencia entre los dos casos es que en el primero (figura 3c) la carga de la derecha es mayor que la de la izquierda, mientras que en el segundo (figura 3d) es al revés. Podéis comprobar que ya no aparece la región con poca densidad de líneas de campo que hemos visto en los dos casos anteriores, ya que ahora las cargas son de signo diferente y, por tanto, ambas "estiran" en el mismo sentido.

Las **líneas de campo** son líneas rectas o curvas que permiten visualizar a primera vista el campo electrostático en una región y tienen las propiedades siguientes (las podéis comprobar en la figura 2 y en la figura 3):

- Siempre comienzan en una carga positiva o en el infinito.

- Siempre acaban en una carga negativa o en el infinito.
- Las líneas de campo nunca se pueden cruzar, excepto en las posiciones donde se encuentran las cargas eléctricas.
- Su recorrido siempre es tangente al vector campo eléctrico en todos los puntos por donde pasa. En otras palabras, siempre marcan la dirección del campo eléctrico en ese punto.
- Su densidad es proporcional al módulo del vector campo eléctrico. Es decir, cuanto más juntas se hallan las líneas, mayor es la intensidad del campo eléctrico en esa región. Del mismo modo, cuanto más alejadas se encuentran las líneas, menor es el módulo del campo.
- En una región donde el campo eléctrico es uniforme (es decir, igual en todos los puntos de la región), las líneas de campo son paralelas.

Hemos visto, a partir de las figuras y de las propiedades mencionadas, que las líneas de campo permiten un análisis cualitativo del campo eléctrico en una región pero no permiten cuantificar el valor exacto, ya que el número de líneas de campo que se emplean es totalmente arbitrario. Para poder hacer un análisis cuantitativo hay que utilizar alguna herramienta matemática que lo permita; aquí es donde entra el concepto de flujo a través de una superficie.

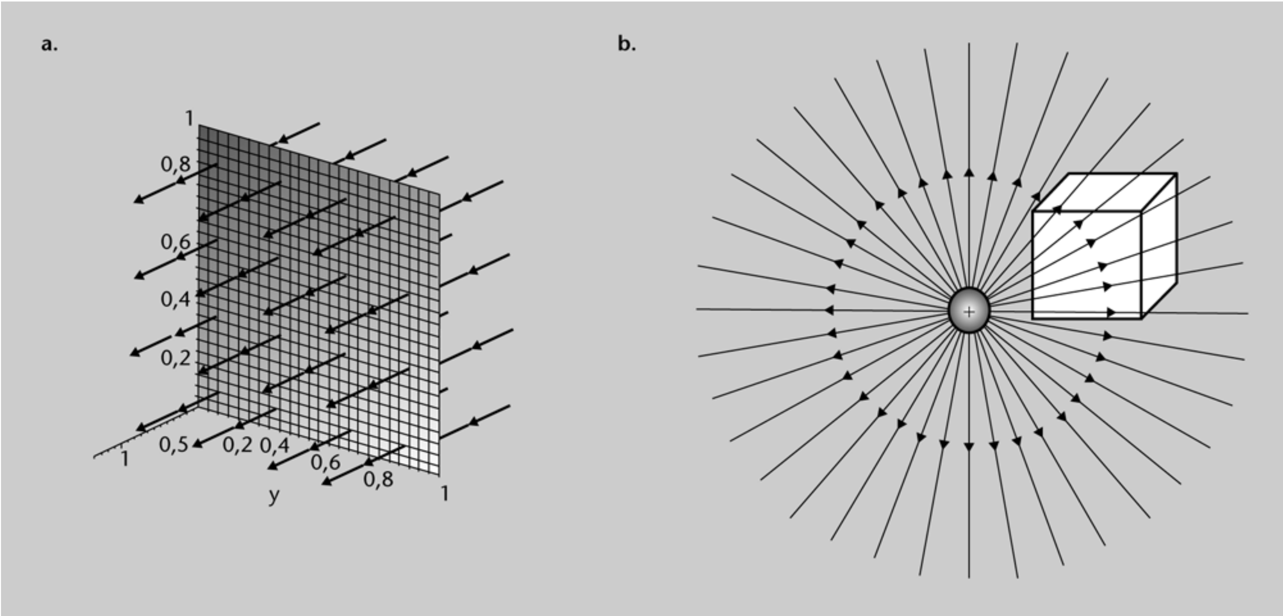
1.1.2. Flujo de un campo electrostático

El flujo de un campo que atraviesa una cierta superficie es una magnitud escalar que es proporcional al número total de líneas de campo que la atraviesan. En la figura 4a podéis visualizar este concepto para un caso simple de una superficie plana y cuadrada y un campo uniforme (líneas paralelas y equidistantes).

El concepto de flujo también tiene en cuenta el sentido de las líneas, de tal modo que cuando las líneas atraviesan la superficie en un sentido el flujo es positivo, y cuando lo hacen en el otro, es negativo. El flujo total corresponde al balance entre las líneas que atraviesan la superficie en un sentido y las que lo hacen en el otro. Por tanto, podría ser que el flujo para una superficie fuese cero aunque hubiese líneas de campo que la atraviesan. Esto sucedería en el caso de que hubiese el mismo número de líneas que lo hacen en un sentido y en el otro.

En la figura 4b podéis visualizar un ejemplo de este último caso. Podéis comprobar que el número de líneas que entran en el cubo es el mismo que el que sale de él.

Figura 4



La definición del flujo de campo para una superficie como el número de líneas de campo que la atraviesan es interesante desde el punto de vista conceptual, intuitivo y cualitativo, pero hay que buscar una expresión matemática que permita cuantificar esta magnitud (es decir, darle una medida).

Figura 4

La figura muestra:

a. El concepto de flujo como el número de líneas de campo que atraviesan una superficie.

b. El flujo a través de una superficie cerrada puede ser cero aunque haya líneas de campo si el número de líneas que entran es el mismo que el de las que salen.

Dado que, como hemos comentado anteriormente, la densidad de líneas de campo eléctrico es proporcional a su módulo, podéis utilizarla para calcular el flujo a través de una superficie.

Se define el **flujo de campo eléctrico** Φ_E a través de una superficie S como la integral de la componente perpendicular del campo eléctrico evaluada sobre toda la superficie:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (3)$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico y $d\vec{S}$ es el diferencial de superficie (que es un vector perpendicular a la superficie).

La unidad de medida del flujo de campo eléctrico en el Sistema Internacional de Unidades es el **voltio-metro** (V·m), aunque a menudo también se emplea el N/C · m^2.

Vectores de superficie $\vec{S}$ y $d\vec{S}$

El vector $\vec{S}$ es un vector perpendicular a la superficie cuyo módulo es su área. El vector $d\vec{S}$ es el vector de superficie correspondiente a cada uno de los infinitésimos en los que se ha dividido la superficie.

Φ_E se lee "fi sub e".

La figura 5 muestra de forma gráfica el significado de la componente perpendicular a la superficie y su relación con el producto escalar. En la figura, el vector $\vec{E}$ se descompone en dos componentes: una componente perpendicular a la superficie ($\vec{E}_{perp}$) y una componente paralela ($\vec{E}_{paral}$).

Producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es una magnitud escalar que depende del ángulo (α) que forman ambos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Cuando los dos vectores son paralelos, el producto escalar es máximo, mientras que si son perpendiculares el producto escalar es cero.

El uso de la componente perpendicular para el cálculo del flujo para una superficie está implícito en la definición de producto escalar cuando este se aplica a un vector de superficie, como el vector $d\vec{S}$, ya que este último está definido como perpendicular a ella.

Figura 5

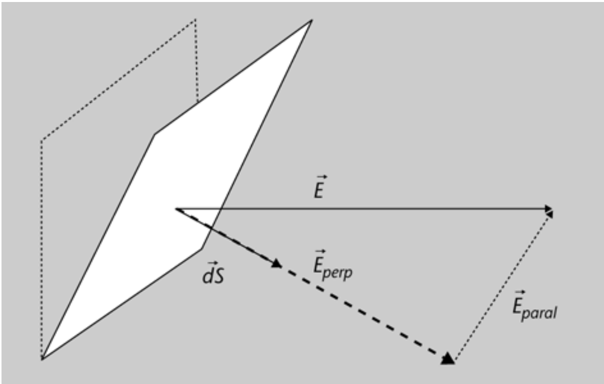


Figura 5

La figura muestra gráficamente el significado de la componente perpendicular a la superficie y su relación con el producto escalar. Observad que el vector de superficie está definido perpendicular a ella.

El hecho de utilizar sólo esta componente en lugar de todo el vector provoca que el resultado sea realmente proporcional al número de líneas que atraviesan la superficie. Podéis entender mejor este concepto si observáis la figura 6:

Figura 6

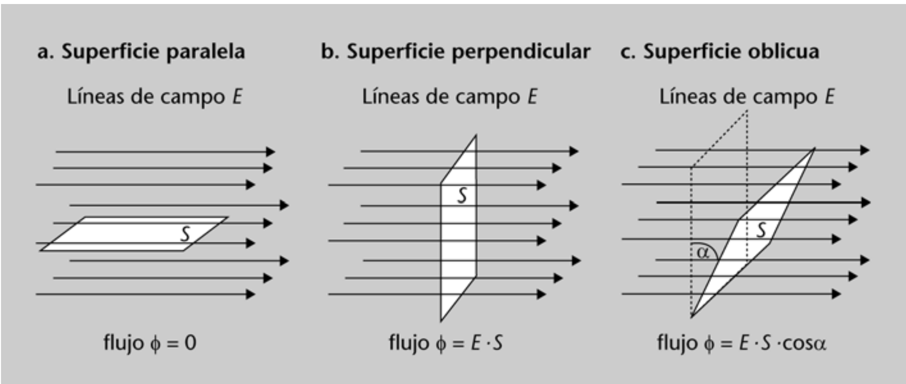


Figura 6

La figura muestra tres ejemplos de posibles orientaciones de la superficie respecto a las líneas de campo:

a. *S* paralela al campo *E*: el flujo es cero porque no hay ninguna línea de campo que atraviese la superficie.

b. *S* perpendicular al campo *E*: el flujo es el máximo posible.

c. *S* oblicua: el flujo depende del ángulo de inclinación de la superficie respecto a la perpendicular al campo.

Observad que el vector superficie está definido como perpendicular a la superficie.

- El primer ejemplo (figura 6a) muestra una superficie colocada “de lado” respecto al campo eléctrico, de manera que no la atraviesa ninguna línea de campo. En este caso, el cálculo según la expresión anterior, es decir, empleando sólo la componente perpendicular, da como resultado cero, que es el resultado correcto. En cambio, si no empleásemos esta componente, el resultado no sería cero, ya que el valor del campo tampoco lo es.

- El segundo ejemplo (figura 6b) muestra una superficie situada de forma totalmente perpendicular al campo eléctrico. El flujo a través de la superficie es el máximo posible. La componente perpendicular es exactamente el mismo valor del campo, ya que no hay componente paralela.

- El tercer ejemplo (figura 6c) muestra una superficie situada formando un ánguluo α con la dirección perpendicular al campo eléctrico. El flujo depende del valor del ángulo.

Ejemplo de flujo de campo eléctrico

El campo eléctrico en una región del espacio es $\vec{E}(\vec{r}) = 2\vec{i}$ [N/C]. Determinad el flujo de campo eléctrico que atraviesa las superficies siguientes, que corresponden a los casos representados en la figura 6:

a) Superficie de 0,5 m^2 paralela al plano $x = 0$.
b) Superficie de 0,5 m^2 perpendicular al plano $x = 0$.
c) Superficie de 0,5 m^2 que forma un ángulo de $\alpha = 60°$ con el plano $x = 0$.

Solución

Recordemos la definición de flujo de campo eléctrico a través de una superficie S (3):

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{3b}$$

Dado que el campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme y la superficie S es plana, es decir, el vector superficie tendrá siempre la misma dirección, la expresión del flujo se simplifica en:

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\alpha \tag{4}$$

- E es el módulo del campo eléctrico $\vec{E}$: $E = 2$ N/C.
- S es el área de la superficie: $S = 0{,}5$ m^2.
- α es el ángulo que forma el campo eléctrico $\vec{E}$ con los vectores de superficie $d\vec{S}$, que recordemos que se trata de vectores perpendiculares a la superficie.

a) En una superficie paralela al plano $x = 0$, es decir, en el plano yz, el vector de superficie $\vec{S}$ siempre apunta hacia la dirección del vector $\vec{i}$ (como en la figura 6b). Dado que el campo eléctrico también apunta en esta dirección, tendremos que el ángulo es $\alpha = 0°$. Por tanto, el flujo es:

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 0° = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 1\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\text{m}^2 \tag{5}$$

b) En una superficie perpendicular al plano $x = 0$, es decir, en el plano yz, el vector de superficie $\vec{S}$ siempre apunta en una dirección perpendicular a la del vector $\vec{i}$ (como en la figura 6a). El ángulo en este caso es $\alpha = 90°$ y, por tanto, el flujo es:

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 90° = 0 \tag{6}$$

c) En una superficie que forma un ángulo de $\alpha = 60°$ con el plano $x = 0$, el vector superficie $\vec{S}$ forma este mismo ángulo de $\alpha = 60°$ con el vector $\vec{i}$ (como en la figura 6c). Por tanto,

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 60° = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\text{m}^2 \tag{7}$$

1.1.3. Ley de Gauss para el campo electrostático

El teorema de Gauss, denominado así en honor al matemático y científico alemán Carl Friedrich Gauss, es un teorema matemático que, en el caso de la electrostática, relaciona el flujo de campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada con la carga que está dentro de esta superficie.

Johann Carl Friedrich Gauss

Matemático y científico alemán (30 de abril de 1777-23 de febrero de 1855) que contribuyó de forma muy significativa al desarollo de muchos campos de la matemática y la física, entre ellos el estudio de las funciones vectoriales. Está considerado uno de los matemáticos más influyentes y relevantes de la historia.

La **ley de Gauss para la electrostática** enuncia que el flujo total de campo electrostático que atraviesa una **superficie cerrada** S cualquiera es proporcional al valor de la carga neta que está en el interior de la superficie (Q_{int}):

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico y ε_0 es la permitividad del vacío. El signo $\oint_S$ indica integral para una superficie cerrada S.

En otras palabras, dado que las líneas de campo sólo pueden comenzar o acabar en una carga eléctrica (o en el infinito), el balance neto entre las líneas que "salen" y las que "entran" a la superficie cerrada sólo puede ser a causa de la presencia de carga neta en su interior.

En la figura 7 podéis ver un ejemplo gráfico de la aplicación de la ley de Gauss:

Figura 7

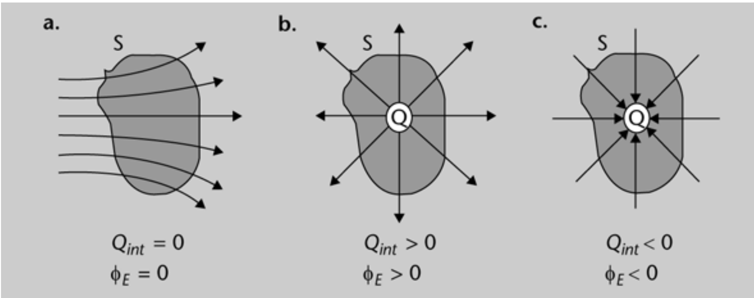


Figura 7

La figura muestra la aplicación de la ley de Gauss a una misma superficie *S* en tres casos concretos:

a. la carga interior es cero,

b. la carga interior es positiva,

c. la carga interior es negativa.

- En la figura 7a, la carga neta en el interior de la superficie *S* es cero. Dado que las líneas de campo sólo pueden comenzar o acabar en una carga eléctrica, la consecuencia es que todas las líneas que entran en la superficie por algún punto deben acabar saliendo por otro. De manera análoga, todas las que salen deben haber entrado por otro punto. Por tanto, el flujo neto de campo eléctrico debe ser necesariamente cero.

- En la figura 7b, la carga interior es positiva, hecho que implica que existen líneas de campo que "nacen" en el interior de la superficie. El flujo es, pues, positivo.

- En la figura 7c, sucede lo mismo pero con la carga negativa y, por tanto, con la existencia de líneas de campo que entran a *S* pero no salen. El flujo es ahora negativo.

El teorema de Gauss también afirma que el flujo total a través de una superficie cerrada **sólo** depende de la carga interior. Por tanto, es independiente tanto de su forma como del volumen que envuelve. Lo único que "interesa" es la carga neta interior. En la figura 8, por ejemplo, el flujo de campo eléctrico a través de la superficie *S* es el mismo para los 3 casos, ya que la carga interior es la misma. Para comprobarlo, podéis hacer un recuento de las líneas de campo que salen menos las que entran y veremos que siempre os dará el mismo número.

Figura 8

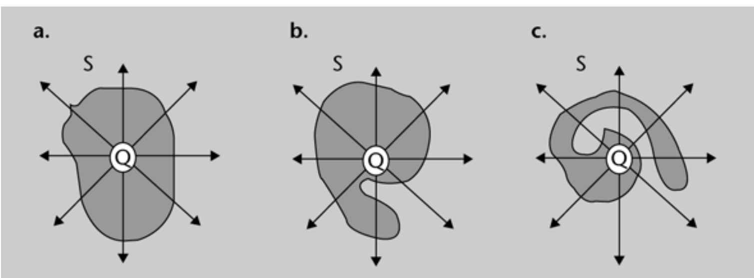


Figura 8

El flujo total a través de una superficie cerrada sólo depende de la carga neta en su interior y es independiente tanto de su forma como del volumen que determina.

Ejemplo de ley de Gauss para el campo electrostático

Mediante el teorema de Gauss, demostrad que el módulo del campo eléctrico creado a una distancia $\|\vec{r}\|$ para una **distribución esférica** de carga centrada en el punto (0,0) sobre un punto de su exterior es:

$$\|\vec{E}(\vec{r})\| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \tag{9}$$

Donde Q es el valor total de carga de la esfera.

Solución

Recordemos el teorema de Gauss (8):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

La ley de Gauss se debe satisfacer para cualquier superficie S. Para simplificar los cálculos, eligiremos la superficie de una esfera centrada también en el punto (0,0) pero con un radio $R = \|\vec{r}\|$, donde $\vec{r}$ es el punto donde queremos calcular el módulo del campo eléctrico.

Dado que tanto la superficie S como la distribución de carga son esferas, el campo eléctrico $\vec{E}$ siempre será perpendicular a S (figura 9). En caso contrario, significaría que no hay simetría esférica. Por tanto,

$$\|\vec{E}\| \oint_S d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

$$\|\vec{E}\| S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

Podemos aislar el valor del campo eléctrico:

$$\|\vec{E}\| = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \tag{13}$$

Finalmente, sustituimos S por el valor de la superficie de una esfera de radio R:

$$\|\vec{E}\| = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \tag{14}$$

En un punto $\vec{r}$ cualquiera, el radio es $R = \|\vec{r}\|$. Por tanto, tendremos:

$$\|\vec{E}(\vec{r})\| = \frac{Q}{4\pi \|\vec{r}\|^2 \varepsilon_0} \tag{15}$$

Como queríamos demostrar.

El concepto de flujo electrostático y el teorema de Gauss son dos aspectos muy importantes y los utlizaremos más adelante. Sin embargo, antes estudiaremos los efectos de los campos electrostáticos sobre otras cargas: las fuerzas electrostáticas.

Figura 9

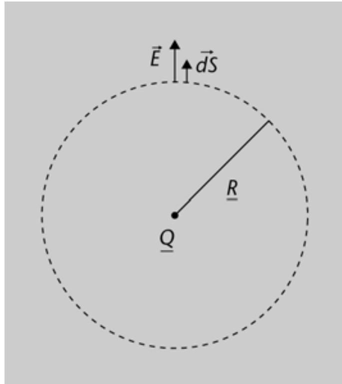


Figura 9

La imagen muestra la superficie de Gauss de radio R. Se muestran el campo creado por una carga Q situada en el centro de la esfera y el $d\vec{S}$ de la esfera.

1.1.4. Efectos del campo electrostático: fuerza electrostática

Hasta ahora hemos introducido el concepto de campo electrostático generado por una carga o distribución de cargas eléctricas y lo hemos tratado como una "alteración" del espacio que las envuelve. Pero ahora toca preguntarse cómo se ven afectadas las cargas que se encuentran en este espacio "modificado". Es decir, hay que determinar cuál es la fuerza que reciben estas cargas por el simple hecho de encontrarse en una región donde existe un campo electrostático.

Anteriormente hemos mencionado que el conocimiento de las características del campo electrostático en un punto nos da toda la información necesaria sobre el comportamiento que tendrá una carga eléctrica en este punto. Este hecho es inherente a la definición de campo electrostático, ya que debéis recordar que este corresponde a la fuerza experimentada por una carga de valor unitario. Por tanto, dándole la vuelta a la definición, podemos deducir que la fuerza experimentada por una carga ubicada en un punto del espacio donde existe un campo electrostático será un vector igual al vector de campo multiplicado por el valor de la carga.

Recordad

El campo eléctrico en un punto corresponde a la fuerza que experimentaría una carga positiva de valor unitario:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Podéis ver el comportamiento de una carga eléctrica en un campo en el subapartado 1.1.1 de este módulo.

La fuerza electrostática experimentada por una carga situada en un punto $\vec{r}$ donde está presente un campo electrostático $\vec{E}$ es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \tag{16}$$

donde q es el valor, incluyendo el signo, de la carga que experimenta la fuerza.

La unidad de medida de la fuerza electrostática en el Sistema Internacional es, como para todas las fuerzas, el **newton** (**N**).

q* y *q'

Para distinguirlas, a partir de ahora utilizaremos q para indicar la carga que experimenta los efectos del campo y q' para la carga que la genera.

De la expresión anterior podemos deducir las propiedades siguientes:

- La fuerza siempre tendrá la misma dirección que el campo.

- El sentido dependerá del signo de la carga que experimenta la fuerza, de tal manera que si la carga es positiva, la fuerza y el campo tendrán el mismo sentido, mientras que si es negativa, tendrán sentidos opuestos.

- El módulo o intensidad de la fuerza será proporcional a la intensidad del campo, pero también al valor de la carga. Es decir, cuanto mayor sea el valor de la carga, mayor será la fuerza experimentada.

Fijaos en que, en esta expresión, el campo electrostático aparece como un simple vector con un valor determinado y en ningún momento se entra en el porqué de sus características. Esto es una gran ventaja, ya que nos permite tratar de manera independiente la generación del campo, por un lado, y sus efectos (la fuerza), por otro.

Repitiendo el mismo procedimiento que hemos seguido en el inicio del apartado con el campo electrostático, podemos aplicar el principio de superposición para calcular la fuerza experimentada por una distribución de cargas. En el caso de distribuciones discretas, la fuerza electrostática es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{E}_i(\vec{r}) \tag{17}$$

Es decir, la fuerza electrostática experimentada por un conjunto de cargas será igual a la suma vectorial de todas las fuerzas que experimentan las cargas por separado.

Si lo que queremos determinar es la fuerza sobre una distribución continua de cargas, habrá que convertir la distribución discreta en una distribución continua y, en consecuencia, sustituir las sumas por integrales.

La fuerza $\vec{F}$ experimentada por una distribución de cargas continua Γ ubicada en una región donde existe un campo electrostático es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r})\, dq \tag{18}$$

donde dq es cada uno de los diferenciales de carga en los que hemos dividido la distribución y $\vec{E}(\vec{r})$ es el campo electrostático presente en las posiciones de estos diferenciales.

Ya conocéis el concepto de campo electrostático, sus características y sus efectos sobre otras cargas (la fuerza electrostática). A continuación profundizaremos en otro aspecto que hasta ahora no hemos tocado: su energía.

1.2. Potencial electrostático y energía potencial electrostática

Imaginaos dos cuerpos de masa cualquiera ubicados en diferentes alturas. Si alguien os pregunta cuál de los dos cuerpos llegaría con más velocidad al suelo, tendríais clara la respuesta: el que se encuentre a mayor altura. Lo que estáis diciendo no es más que indicar que este cuerpo tiene más potencial gravitatorio, es decir, más energía "almacenada" susceptible de ser transformada en energía cinética.

El concepto de potencial electrostático es similar al de potencial gravitatorio. De la misma manera que una masa puede "acumular" energía simplemente por el hecho de estar situada en un punto más alto dentro de un campo gravitatorio, una carga eléctrica podrá hacer lo mismo situándose en una cierta posición dentro de un campo electrostático.

Todos los campos electrostáticos tienen un potencial electrostático asociado. El potencial electrostático en un punto corresponde al trabajo necesario para trasladar hasta este una carga de valor unitario desde otro punto de referencia seleccionado como origen de potenciales.

El campo electrostático es un campo conservativo, lo que significa que el trabajo realizado sólo depende de las posiciones inicial y final y no del camino recorrido. Por tanto, podremos hablar de potencial electrostático en un punto y de diferencia de potencial entre dos puntos, ya que en ambos casos se tratará siempre de valores únicos.

El **potencial electrostático** V en un punto $\vec{r}$ es el trabajo necesario para desplazar una carga positiva de valor unidad desde un origen de potenciales $\vec{r}_0$ hasta este punto:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (19)$$

donde $\vec{E}$ es el campo electrostático en los puntos por donde pasa el recorrido.

La unidad de medida del potencial electrostático en el Sistema Internacional de Unidades es el **voltio (V)**.

Integral de línea

Una integral de línea es una integral del tipo

$$W(\vec{r}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Dado que el término que se debe integrar es un producto escalar, lo que se hace es considerar únicamente las componentes tangenciales en un recorrido determinado.

El signo negativo indica que el potencial es positivo cuando el recorrido se hace en sentido contrario al campo electrostático y, por tanto, se debe realizar un trabajo para desplazar la carga, mientras que es negativo en el caso contrario.

De la misma manera que hemos definido el potencial electrostático en un punto, podemos definir la diferencia de potencial entre dos puntos como el trabajo necesario para trasladar una carga positiva de valor unitario entre estos dos puntos. Dado que el campo electrostático es conservativo, la diferencia de potencial entre dos puntos será un valor único y **no dependerá del camino recorrido**.

La **diferencia de potencial** entre dos puntos A y B es el trabajo necesario para desplazar una carga positiva de valor unitario desde un origen de potenciales $\vec{r}_0$ hasta este punto:

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (20)$$

donde $\vec{E}$ es el campo electrostático en los puntos a lo largo del camino recorrido ($d\vec{l}$).

Fijaos en que en la expresión del potencial electrostático aparece una integral de línea. Esto significa que, para el cálculo del potencial, solo hay que integrar (sumar) la componente del campo eléctrico **tangencial** al camino recorrido.

Como hemos visto, la diferencia de potencial entre dos puntos corresponde al trabajo realizado para desplazar una carga de 1 C de un punto al otro. De forma matemática, esto se traduce en el hecho de que el potencial es la integral de línea del campo eléctrico. Entonces nos podemos hacer una pregunta: ¿se puede determinar la relación inversa? Es decir, ¿existe una expresión matemática para calcular el campo en función del potencial?

La respuesta es que sí, pero para explicaos cómo primero deberemos introducir un nuevo concepto: el gradiente de una función vectorial. Y para introduciros este concepto, antes debemos presentaros una herramienta matemática también nueva: el operador nabla, que ya habéis visto, muy de pasada, en el módulo de ondas.

1.2.1. El operador nabla y el gradiente de una función

El operador nabla, que se representa con el símbolo $\vec{\nabla}$, es un vector definido en el espacio, cuyas coordenadas son las derivadas parciales respecto a cada una de las direcciones de los ejes de coordenadas.

Recordad

La derivada de una función $f(x)$ es una medida de su ritmo de variación respecto a la variable independiente x. La notación que se utiliza es:

$$f'(x)$$

o bien

$$\frac{df}{dx}$$

Si la derivada se evalúa en un punto determinado, su valor indica la pendiente de una hipotética recta tangente a la función en aquel punto.

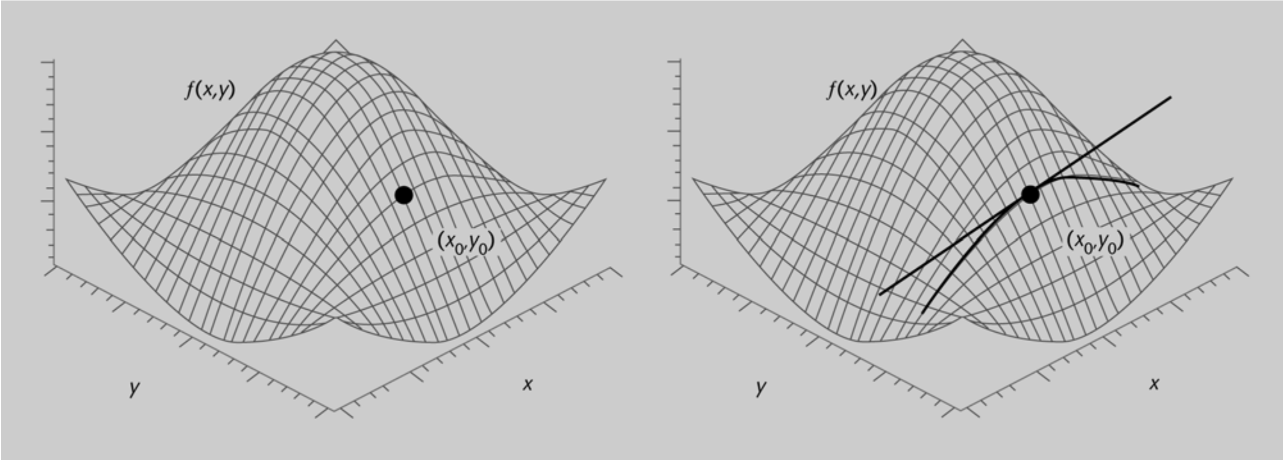
Si recordáis, la derivada de una función es una medida de su ritmo de cambio. Así, por ejemplo, si tenemos que una función crece muy rápidamente en un cierto intervalo, el valor de su derivada será alto en todos los puntos del intervalo, mientras que si lo hace de manera lenta, el valor será pequeño. Para una función decreciente, sucede lo mismo pero con valores negativos. Cuando se evalúa en un punto determinado, la derivada de una función es igual a la pendiente de una hipotética recta tangente a la función en aquel punto.

Recordad

$f(x,y)$ representa una función de dos variables, es decir, una función donde las variables independientes son dos (x e y). Si una función de una sola variable se representa con una línea (ya sea curva o recta), una función de dos variables se representa mediante una superficie (ya sea plana o curva).

Ya hemos recordado qué es una derivada, pero ¿qué es una derivada parcial? Para recordar este concepto, observad la figura 10. En ella se muestra una representación gráfica de una función de dos variables, $f(x,y)$, que es una superficie curva cuya "altura" corresponde al valor de la función en aquella coordenada. Por ejemplo, si se evalúa la función en un punto cualquiera $P = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ obtendremos el valor de la función en aquel punto, $f(x_0,y_0)$, y esta será la altura de la curva en aquella coordenada. La derivada parcial de la función respecto a la variable x es el ritmo de crecimiento o decrecimiento de la función cuando se mantiene constante el valor del resto de las variables (en el ejemplo, sólo hay otra variable, y). En otras palabras, cuando nos "desplazamos" en la dirección del eje x.

Figura 10



Cuando se evalúe la derivada parcial de una función respecto a una dirección en un punto determinado, obtendréis, como en el caso de la derivada para una función de una sola variable, la pendiente de la recta tangente a la función en este punto y en aquella dirección. En la figura 10, la derivada parcial de la función $f(x,y)$ respecto a la dirección x y evaluada sobre el punto $P = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ nos dará la pendiente de la recta tangente dibujada.

Figura 10

Derivada parcial de una función $f(x,y)$ respecto a la variable x y recta tangente en el punto:

$$P = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j}$$

Ahora que ya conocéis el concepto de derivada parcial, volvamos al operador nabla. Decíamos que el operador nabla ($\vec{\nabla}$) es un vector cuyas coordenadas son las derivadas parciales respecto a cada una de las direcciones de los ejes de coordenadas. En forma matemática, esto se expresa así:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (21)$$

donde hemos utilizado las dos notaciones vectoriales, con comas y con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. No olvidéis que solo es notación.

Recordad

Para distinguir una derivada parcial de una derivada en una variable, la notación que se utiliza para expresar las derivadas parciales es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\text{o } \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \ldots\right)$$

Observad que en las coordenadas del operador nabla ($\vec{\nabla}$) falta indicar la función f. Esto es porque se trata de un operador, no de un valor, y puede aplicarse a cualquier magnitud o función, ya sea escalar o vectorial.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ se lee "derivada parcial de f respecto a x".

Como cualquier vector, con el operador nabla ($\vec{\nabla}$) podemos realizar tres operaciones:

- **Producto por un escalar**
  En el caso de $\vec{\nabla}$, esta operación recibe el nombre de **gradiente**.

- **Producto escalar**
  En el caso de $\vec{\nabla}$, esta operación recibe el nombre de **divergencia**.

- **Producto vectorial**
  En el caso de $\vec{\nabla}$, esta operación recibe el nombre de **rotacional**.

Dejaremos las dos últimas para más adelante y nos centraremos en la primera: el gradiente. Como ya hemos dicho, el gradiente de una función escalar es el producto del operador nabla ($\vec{\nabla}$) por un escalar. Esto se expresa de la forma siguiente:

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (22)$$

Como podéis ver, el resultado es un vector cuyas coordenadas son las derivadas parciales de la función respecto a cada uno de los ejes.

En cada punto, las coordenadas del vector gradiente tendrán unos valores que corresponderán a las pendientes de las respectivas rectas tangentes a la función en cada una de las direcciones de los ejes.

Gradiente de una función

El gradiente de una función

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

está definido en todos los puntos (x, y, z) donde la función es continua y derivable.

Hemos visto que las coordenadas del gradiente, por separado, corresponden a las pendientes de las rectas tangentes. Pero ¿qué significado tiene el gradiente en conjunto? En otras palabras, ¿qué expresa el vector gradiente? Observad el ejemplo de la figura 11. La curva representa una función $f(x,y)$ y las flechas de la parte inferior indican la dirección y magnitud de los vectores gradiente en algunos de los puntos de la región.

Figura 11

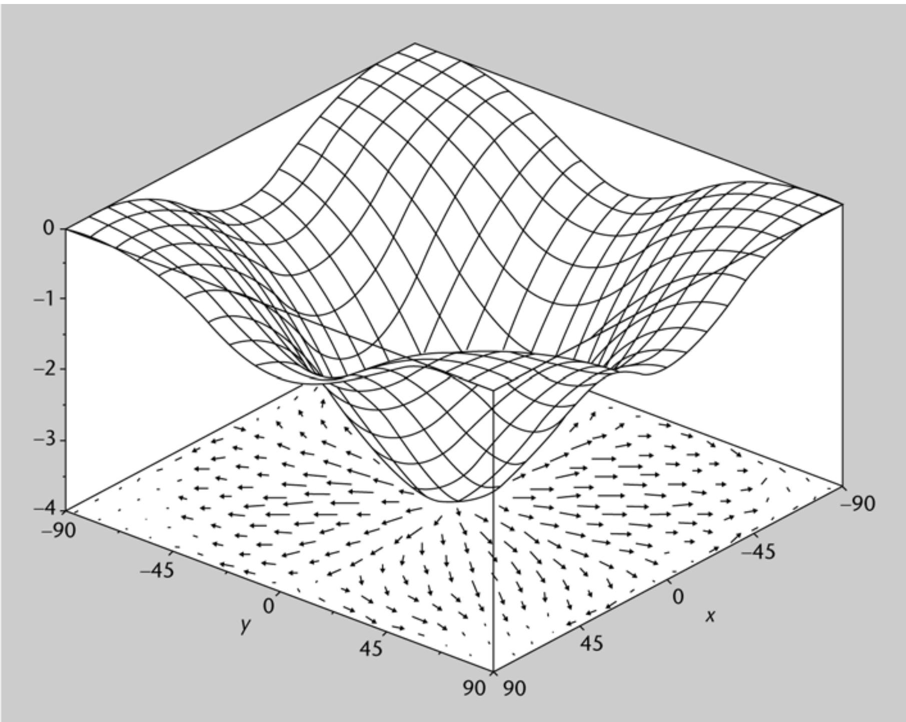


Figura 11

Representación de una función $f(x,y)$ (curva) y de sus vectores gradiente (flechas).

De la figura podéis extraer dos conclusiones:

- La dirección del vector gradiente en un punto indica la **dirección de máximo crecimiento** de la función. Podéis comprobarlo si observáis, por ejemplo, que las flechas que se encuentra sobre los puntos x = 0 señalan la dirección y, ya que esta es la dirección de máximo crecimiento.

- El módulo del vector gradiente indica el **ritmo de crecimiento** respecto a esta dirección de máximo crecimiento. Podéis comprobarlo si observáis, por ejemplo, que las flechas son muy cortas alrededor del punto (0, 0) y también en las esquinas, ya que en estos puntos la función es casi plana y, por tanto, el crecimiento es mínimo.

Ahora ya conocéis el concepto de gradiente. La pregunta que os estaréis haciendo es: ¿qué tiene que ver el gradiente con el potencial? Enseguida lo veréis.

1.2.2. El campo como gradiente del potencial

Hemos visto que la diferencia de potencial electrostático entre dos puntos es la integral de línea del campo electrostático a lo largo de un recorrido cualquiera entre estos dos puntos. También hemos visto que el potencial es una función escalar, una cantidad que asignamos a cada punto del espacio para indicar el trabajo que sería necesario para colocar en aquel una carga unitaria. Por otro lado, podéis considerar el campo electrostático como lo que cuesta desplazar una carga entre dos puntos con potencial diferente. Cuanto mayor es el campo que debemos superar, más trabajo necesitamos para desplazar la carga.

Ahora tomemos dos conceptos e intentemos relacionarlos con el ejemplo de la figura 11, donde aparecía una función escalar y su gradiente. Podéis considerar el potencial electrostático en un punto como el valor de la función, es decir, la altura de la curva. Por otro lado, dado que el campo electrostático es lo que “cuesta” desplazar una carga, lo podéis relacionar con la pendiente de la recta de máximo crecimiento, es decir, su gradiente.

Por tanto, la conclusión es que el campo electrostático corresponde al gradiente del potencial electrostático.

El campo electrostático $\vec{E}$ en un punto $\vec{r}$ corresponde al **gradiente** del potencial electrostático $V(\vec{r})$, cambiado de signo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{23}$$

donde el operador $\vec{\nabla}$ viene dado por la ecuación (21).

La inclusión del signo negativo se debe al mismo motivo que aparecía en las expresiones (19) y (20), y la explicación es la siguiente: la diferencia de potencial electrostático entre dos puntos corresponde al trabajo necesario para desplazar una carga unitaria; este trabajo se debe realizar cuando nos movemos en sentido **contrario** al campo electrostático, y de aquí viene el signo negativo.

Ejemplo de campo como gradiente del potencial

El potencial eléctrico en una región está regido por la expresión $V(\vec{r}) = 10x$. Determinad el campo eléctrico en la región y comprobad que se trata de un campo uniforme.

Solución

Según la ecuación (23), el campo eléctrico corresponde al gradiente del potencial, cambiado de signo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad (24)$$

El potencial es $V(\vec{r}) = 10x$. Por tanto,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -(10,0,0) = -10\vec{i}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \quad \text{o} \quad -10\vec{i}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \quad (25)$$

Como podéis comprobar, el campo eléctrico es uniforme, ya que siempre presenta el mismo módulo (10 V/m) y la misma dirección y sentido (a lo largo del eje *x* en el sentido de los números negativos).

1.2.3. Energía potencial electrostática

El concepto de energía potencial electrostática es similar al de energía potencial gravitatoria, pero teniendo en cuenta las cargas eléctricas en lugar de las masas.

Del mismo modo que el conocimiento del campo electrostático en un punto nos permite determinar sus efectos sobre una carga cualquiera ubicada dentro de su radio de accción, el conocimiento del potencial electrostático permite determinar su energía potencial electrostática.

La energía electrostática *U* de una carga situada en un punto $\vec{r}$ en el que existe un potencial electrostático $V(\vec{r})$ es:

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) \quad (26)$$

donde q es el valor de la carga.

La unidad de medida de la energía electrostática en el Sistema Internacional es, como en todos los tipos de energía, el **julio** (**J**).

Como en el caso de la fuerza, podemos aplicar también el principio de superposición para calcular la energía total correspondiente a una distribución de carga ubicada en una región donde existe un potencial electrostático.

Podéis ver la aplicación a la fuerza del principio de superposición en el subapartado 1.1.4 de este módulo.

Para el caso de distribuciones discretas, la energía total es:

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}) \quad (27)$$

Y para el caso de una distribución continua, Γ:

$$U(\vec{r}) = \int_{\Gamma} V(\vec{r}) \cdot dq \quad (28)$$

De la misma manera que hemos visto que el campo eléctrico correspondía al gradiente del potencial, podéis ver a qué corresponde el gradiente de la energía potencial, partiendo de la expresión (26) y considerando que la carga q es constante:

Nota

Hacemos los desarrollos en el caso de distribuciones discretas por simplicidad, aunque son generalizadas en distribuciones continuas.

$$\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \vec{\nabla}qV(\vec{r}) = q\vec{\nabla}V(\vec{r}) \tag{29}$$

Si empleais la igualdad (23), tendréis que

$$\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -q\vec{E}(\vec{r}) \tag{30}$$

Si os fijáis, el segundo término de la ecuación corresponde a la expresión para la fuerza electrostática (16). Por tanto, finalmente obtendréis:

Recordad

La relación entre la fuerza electrostática y el campo electrostático es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r}) \tag{31}$$

Es decir, el gradiente de la energía potencial electrostática corresponde a la fuerza electrostática.

La fuerza electrostática $\vec{F}$ en un punto $\vec{r}$ corresponde al **gradiente** de la energía potencial electrostática $U(\vec{r})$, cambiado de signo:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \tag{32}$$

Hasta aquí hemos visto los conceptos de campo electrostático, fuerza electrostática, potencial electrostático y energía potencial electrostática, y hemos visto las relaciones entre ellos. En la figura 12 podéis ver un esquema donde se pretende mostrar estos conceptos de forma global para entender mejor sus relaciones. En el esquema hemos supuesto que tenemos una carga de prueba de valor q.

Figura 12

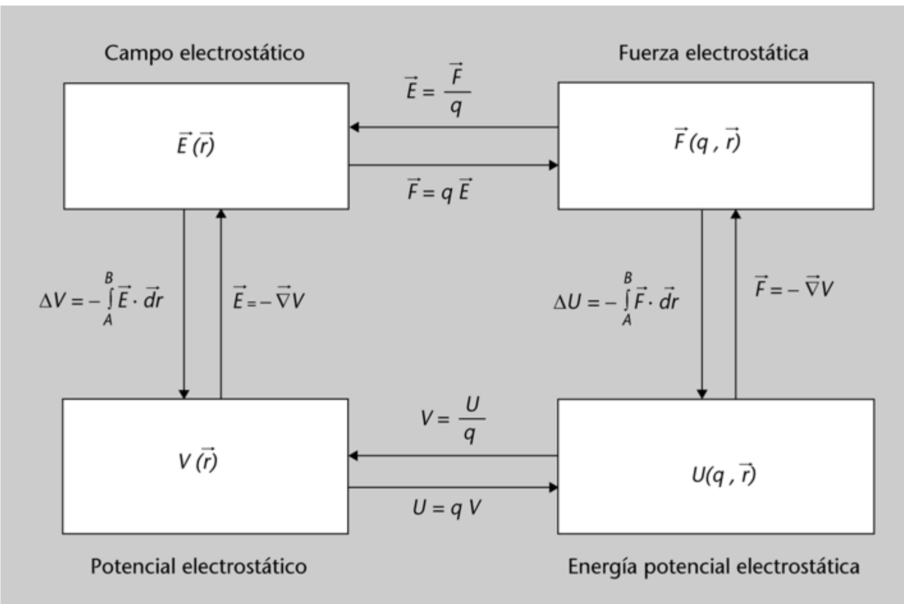


Figura 12

La figura muestra los conceptos que hemos introducido hasta aquí (campo electrostático, fuerza electrostática, potencial electrostático y energía potencial electrostática) y sus relaciones.

Lo expresamos para una única q para simplificar el diagrama aunque el esquema es generalizable para distribuciones discretas y continuas.

Fijaos en que para relacionar conceptos en la misma fila solo es necesario multiplicar o dividir por q. En cambio, para relacionar conceptos en la misma columna sólo es necesario calcular el gradiente o integrarlo a lo largo del camino recorrido.

1.3. Electrostática en presencia de medios materiales

En el apartado anterior hemos mostrado que un campo electrostático afecta a la región de su alrededor, y también hemos visto los conceptos y las expresiones de flujo de campo, fuerza electrostática, potencial electrostático y energía potencial electrostática. Todo el tratamiento se ha hecho considerando el caso "ideal" en el que en la región afectada está el vacío.

Sin embargo, en el mundo real la mayoría de los campos electrostáticos se encuentran en medios materiales con características muy distintas. La presencia de materia allí donde hasta ahora habíamos considerado que no había "nada" puede "distorsionar" los efectos que uno esperaría si sólo tuviese en cuenta las propiedades estudiadas hasta ahora.

Desde el punto de vista que nos interesa, podemos dividir la materia en dos tipos: materiales dieléctricos (o aislantes) y materiales conductores. Esta es la división que haremos en esta asignatura y es la división más simple que podemos hacer. No obstante, debéis tener presente que hay otros tipos de materiales, como los semiconductores, los superconductores o, más recientemente, los metamateriales. Ahora bien, si entendéis los fundamentos de los conductores y los dieléctricos, podréis llegar a entender también los de estos otros materiales.

Semiconductores

Los materiales denominados semiconductores presentan unas características eléctricas a medio camino entre los dieléctricos y los conductores. Estas características "especiales" de los semiconductores se convierten en los fundamentos de la electrónica. Algunos ejemplos muy comunes de materiales semiconductores son el silicio (Si), el germanio (Ge) o el arseniuro de galio (GaAs).

1.3.1. Materiales dieléctricos

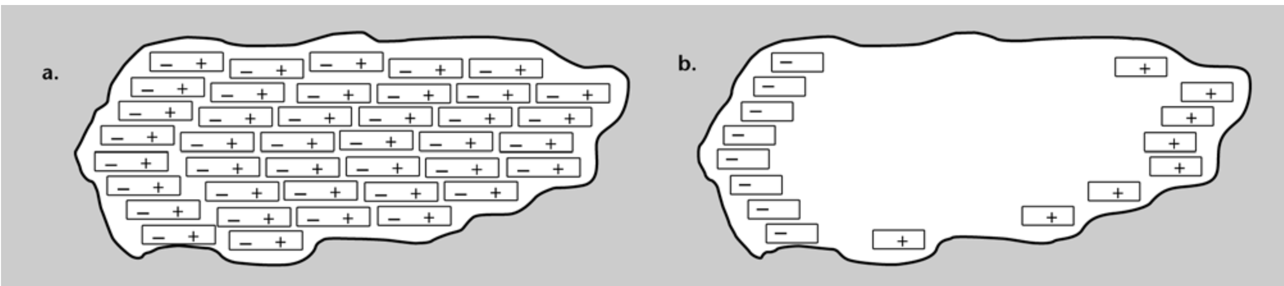
Un material dieléctrico es aquel en el que todas las partículas cargadas están fuertemente unidas a sus respectivas moléculas. Por tanto, a priori, podríamos decir que estas no se deberían ver afectadas por la presencia de un campo electrostático de modo significativo. No obstante, esto no es cierto, ya que las distintas partículas que conforman las moléculas se redistribuyen internamente en función de la dirección del campo. En concreto, las partículas con carga positiva tenderán a desplazarse en el mismo sentido del campo eléctrico y las partículas con carga negativa lo harán en sentido contrario. Observad la figura 13a.

Figura 13

La parte **a** muestra la representación esquemática de los dipolos que aparecen en un material dieléctrico cuando es sometido a un campo eléctrico.

En la parte **b** podéis observar que las cargas positivas de un dipolo se compensan con las negativas del dipolo vecino, excepto en los extremos. Se produce la **polarización** del material.

Figura 13



El resultado será una pequeña redistribución de las cargas en forma de pequeños dipolos electrostáticos. Aunque la carga total de cada molécula seguirá siendo neutra, las cargas individuales que la forman se habrán desplazado de su posición natural. En la figura 13b podéis observar que las cargas positivas de un dipolo se compensan con las negativas del dipolo vecino, excepto en los extremos. Se produce la **polarización** del material.

Pero ¿cómo afecta esta polarización al campo electrostático total en un punto? La respuesta puede ser muy complicada si se han de tener en cuenta todos los efectos microscópicos (es decir, si miramos qué sucede a nivel molecular o en pequeñas regiones) de la polarización. El problema es que cuando la polarización está presente, el campo electrostático que tenemos incluye tanto la parte debida a la polarización como la parte debida a las cargas libres (las que hemos empleado siempre, vamos).

Dado que el campo causado por la polarización es difícil de determinar, lo que hacemos es trabajar con un campo que sólo depende de las cargas libres. Puesto que la polarización se opone al campo, para obtener el campo que depende solo de las cargas libres lo que hacemos es volverle a sumar, al campo total, la parte debida a la polarización, que es la que no conocemos. Este campo se denomina *campo de desplazamiento eléctrico* $\vec{D}$.

El **campo de desplazamiento** ($\vec{D}$) es una medida de los efectos del campo electrostático debido solo a las cargas libres y se define como:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{33}$$

donde $\vec{E}$ es el campo electrostático que tendríamos en el vacío y $\vec{P}$ es la polarización.

ε_0 es una constante denominada *permitividad del vacío* (ε_0) o también *constante eléctrica*, y es una de las constantes físicas universales. Su valor es:

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \tag{34}$$

ε_0 se lee "épsilon sub cero".

Como podéis ver, el campo de desplazamiento consta de dos términos. Por un lado, tenemos un primer término que es proporcional al campo eléctrico externo ($\vec{E}$); por el otro, tenemos el segundo término, que depende de la polarización ($\vec{P}$). No obstante, este segundo término se puede entender como una "respuesta" al campo electrostático aplicado ($\vec{E}$) y, por tanto, su valor depende de este. ¿Podríamos, pues, relacionar ambos términos y, en consecuencia, encontrar una relación directa entre el campo de desplazamiento ($\vec{D}$) y el campo electrostático ($\vec{E}$)?

La respuesta es que en la práctica encontrar esta relación es, en general, más complicado de lo que puede parecer. En cualquier caso, se puede simplificar si consideramos únicamente el caso en el que se cumplen las condiciones siguientes:

- El medio es **isótropo**. Esto significa que el valor de la polarización ($\vec{P}$) no depende de la dirección del campo eléctrico o, en otras palabras, que no existe una dirección “privilegiada” en la que un material se polarice mejor que en las otras.
- El medio es **homogéneo**. Esto significa que la polarización es igual en todas partes o, con otras palabras, que no existen regiones donde la polarización es más intensa que en otras.
- El medio es **lineal**. Esto significa que la polarización es proporcional a la intensidad del campo electrostático.

El estudio de la polarización en medios que no cumplen estas características es muy complejo y va más allá de los objetivos de este módulo.

En un medio material **isótropo**, **homogéneo** y **lineal**, el **campo de desplazamiento** es proporcional al campo electrostático y se rige por la expresión siguiente:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (35)$$

donde ε es la **permitividad del material.**

La unidad de medida del campo de desplazamiento es el **coulomb por metro cuadrado** (C/m^2).

i. h. l.

A menudo se utilizan las iniciales i. h. l. para indicar los medios materiales que son isótropos, homogéneos y lineales o que se les aproximan.

La permitividad del material es una constante específica para cada material. Existen tablas con los valores experimentales encontrados para la mayoría de los materiales conocidos. Por ejemplo, para el vacío encontraréis que $\varepsilon = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{Nm^2}$, que es precisamente el valor ε_0 que hemos introducido en (34).

Por cuestiones prácticas, a menudo se suele expresar la permitividad del material en términos relativos respecto a la permitividad del vacío (34). Por ejemplo, el agua a 20 °C se dice que presenta una permitividad 80 veces mayor que el vacío. En este caso, hablaremos de **permitividad relativa** (ε_r). La relación entre ambas viene dada por la expresión siguiente:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \qquad (36)$$

ε, ε_r, ε_0
se leen “épsilon”, “épsilon sub erre” y “épsilon sub cero”, respectivamente.

La permitividad relativa (ε_r) también se denomina a menudo **constante dieléctrica** y es la característica que se da de manera más habitual.

La permitividad eléctrica, tanto si es absoluta (ε) como relativa (ε_r), es una propiedad de los medios materiales que mide cómo responden ante la presencia de un campo eléctrico. Podemos utilizar este parámetro en todas las ecuaciones que hasta ahora estaban definidas para el vacío para aplicarlas a un medio cualquiera, simplemente sustituyendo el valor de la permitividad del vacío (ε_0) por el valor correspondiente al medio en cuestión (ε).

Ejemplo de campo de desplazamiento

El módulo del campo electrostático creado por una distribución esférica de carga Q ubicada en el punto (0, 0, 0) sobre un punto exterior es:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2} \tag{37}$$

donde ε es la permitividad del medio y r es el módulo del vector de posición $\vec{r}$, es decir, la distancia respecto al punto (0, 0, 0).

Conociendo esto, determinad el campo electrostático que generaría una esfera cargada con $Q = 2\ \mu C$ sobre el punto (1, 1, 1) en los casos siguientes:

a) el medio exterior es el vacío
b) el medio exterior es el aire ($\varepsilon_r = 1{,}0006$)
c) el medio exterior es el agua ($\varepsilon_r = 80$)

Solución

En primer lugar, calcularemos el valor de r:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\ \text{m}$$

Ahora ya podemos calcular el campo para el primer caso, el del vacío ($\varepsilon_r = \varepsilon_0$):

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}^2} = 5.992{,}5\ \mathrm{N/C} \tag{38}$$

Para el resto de los casos, podemos utilizar la ecuación (36), según la cual la permitividad ε de un material es su permitividad relativa ε_r multiplicada por la del vacío ε_0. Por tanto, para el caso del aire, tendremos $\varepsilon = 1{,}0006\varepsilon_0$ y:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot 1{,}0006 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}^2} = 5.988{,}9\ \mathrm{N/C}$$

Podemos comprobar que la diferencia respecto al vacío es ínfima, dado que la permitividad eléctrica del aire está muy próxima a 1.

Para el caso del agua, tenemos $\varepsilon = 80\varepsilon_0$ y:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot 80 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}^2} = 74{,}9\ \mathrm{N/C}$$

Podéis comprobar que el campo eléctrico se ha reducido un factor 80 respecto al que tendríamos en el vacío, que es precisamente el valor de la permitividad eléctrica relativa:

$$\frac{5.992{,}5}{74{,}9} = 80$$

Recordad

El módulo de un vector, por ejemplo, F, se puede representar como $\|F\|$ o como r.

1.3.2. Materiales conductores

Un material conductor es aquel en el que existen algunas partículas cargadas que quedan “libres” para moverse a través del material. Los materiales conductores más habituales son los metales, ya que sus partículas cargadas, en este caso sus electrones, pueden “escaparse” más fácilmente. En función de la facilidad de estos electrones para “liberarse”, encontraremos materiales más o menos conductores.

Recordad

En un átomo podemos encontrar:

- **electrones**, que tienen carga negativa,
- **protones**, que tienen carga positiva,
- **neutrones**, que son neutros y, por tanto, no tienen efecto desde el punto de vista electrostático.

Cuando un material conductor se encuentra en una región donde está presente un campo electrostático, estas cargas tendrán libertad para moverse en función de las características del campo. Sin embargo, llegará un momento en el que todas las cargas se habrán desplazado y no quedará ninguna. Cuando esto sucede se dice que se ha llegado al estado estacionario y el campo en el interior del material es cero.

Superconductores

Los materiales denominados *superconductores* son aquellos que, por debajo de una cierta temperatura, actúan como conductores perfectos.

Por tanto, en el estado estacionario (las cargas ya no se mueven), el campo electrostático en el interior de un conductor es **cero**.

Por otro lado, si recordáis la relación entre el campo y el potencial (23):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

La consecuencia es que si el campo es cero, el potencial debe ser constante.

En el estado estacionario, el potencial electrostático en el interior de un conductor es **constante**.

Ejemplo de potencial electrostático en el interior de un conductor

Demostrad que el potencial electrostático en el interior de un conductor es constante.

Solución

Como ya hemos dicho, el campo electrostático en el interior de un conductor siempre es cero:

$$\vec{E} = 0 \tag{39}$$

Por otro lado, recordemos que el campo $\vec{E}$ corresponde al gradiente del potencial V, tal como hemos visto en la ecuación (23):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{40}$$

Si combinamos las dos expresiones (39) y (40), tendremos que :

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = 0 \tag{41}$$

Según la definición de gradiente (22), esto significa que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Por tanto, para las propiedades de las derivadas, el potencial deberá ser constante respecto a todas las variables:

$$V(x,y,z) = constante$$

Recordad

Si $f(x)$ = *constante*, entonces:

$$\frac{df}{dx} = 0$$

1.4. ¿Qué hemos aprendido?

En este primer apartado hemos hecho un repaso de los conceptos clave de la electrostática. Hemos incidido en el estudio de las líneas de campo eléctrico y en su significado, y hemos determinado un método de cuantificación de estas líneas mediante el concepto de flujo de campo eléctrico. En relación con el flujo, hemos enunciado el teorema de Gauss aplicado al campo eléctrico y hemos llegado a la conclusión de que las líneas de campo solo pueden comenzar o acabar allí donde se encuentren las cargas eléctricas.

También hemos hablado de la energía asociada al campo electrostático y lo hemos hecho mediante el concepto de potencial electrostático. Para relacionar el potencial con el campo hemos introducido un operador matemático, el operador nabla, y una herramienta matemática, el gradiente de una función.

Para acabar, hemos estudiado qué sucede cuando un campo eléctrico se encuentra en una región donde hay un medio material y hemos visto que la presencia del medio modifica el campo eléctrico "efectivo" en su interior. En el caso de un medio dieléctrico, aparece una polarización que se manifesta como un campo eléctrico que se opone al campo externo y, por tanto, reduce la efectividad. Para determinar esta efectividad hemos introducido el concepto de permitividad eléctrica de los medios. En el caso de un medio conductor, el campo eléctrico en su interior es siempre cero en condiciones estacionarias.

2. Repaso de electromagnetismo: magnetostática e inducción

En el apartado de repaso de la electrostática hemos visto las características y propiedades de los campos electrostáticos, es decir, los efectos e interacciones de las cargas eléctricas en condiciones estáticas (cuando no se mueven). En este apartado explicaremos los fenómenos que se observan cuando las cargas dejan de estar en reposo y se encuentran en movimiento. Introduciremos el concepto de campo magnético y veremos su relación con los campos eléctricos variables. Más adelante, en los últimos apartados, iremos un paso más allá y estudiaremos los fenómenos que se producen cuando el campo magnético también es variable.

Antes, sin embargo, definiremos un concepto clave que nos servirá para el resto del apartado: el concepto de corriente eléctrica.

2.1. Corriente eléctrica

Cuando queremos estudiar el movimiento de una sola carga, podemos tratarla de forma individual sin apenas dificultad. Conocer el valor de su carga, su velocidad y su trayectoria es suficiente para determinar sus efectos. Lo mismo sucede para un número pequeño de cargas puntuales.

No obstante, en la mayoría de los casos del mundo cotidiano, las cargas ni van solas ni se pueden tratar como elementos individuales, sino que forman parte de un "flujo" que se puede aproximar a continuo. Se dice que se está produciendo una **corriente eléctrica**.

Podéis hacer una analogía con un grifo. Si abrimos lentamente el paso del grifo, es posible que comiencen a caer gotas individuales muy lentamente, de manera que podremos contar individualmente el número de gotas que caen. Si abrimos el grifo un poco más, las gotas irán cayendo más rápido. Seguro que nos resultará mucho más dificil contarlas, pero aun así seríamos capaces de hacerlo si las observásemos con la concentración suficiente. Si seguimos abriendo el grifo aún más, llegará un momento en el que nos será imposible distinguir las gotas individualmente. Deberemos pasar de contar el número de gotas a contar el volumen del agua. Aunque en realidad las gotas continúan siendo elementos individuales, a efectos de cálculo nos hemos visto obligados a tratar el agua como un flujo continuo.

Con la corriente eléctrica sucede lo mismo. Lo que individualmente bastaba para determinar los efectos de una carga eléctrica individual o de un grupo reducido, el valor de la carga y la velocidad, es inviable (por no decir imposible) de calcular si el flujo es continuo. Para estos casos se define una magnitud mucho más interesante: la intensidad de corriente.

2.1.1. Intensidad de corriente

La medida cuantitativa de la cantidad de carga que se desplaza y de su velocidad se realiza mediante el concepto de **intensidad de corriente**. Observad primero la figura 14.

Figura 14

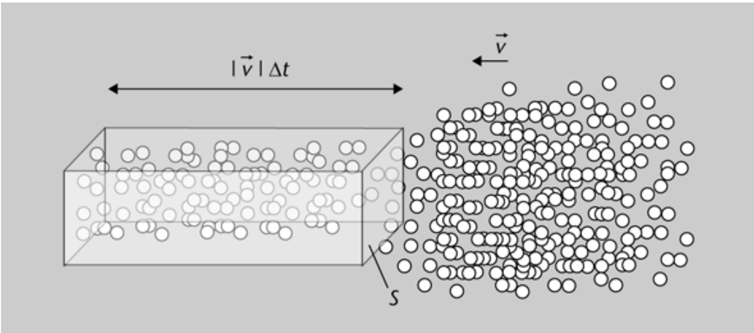


Figura 14

La figura muestra el paso conceptual entre el tratamiento individual de las cargas en movimiento y el tratamiento colectivo como flujo continuo.

En el ejemplo, una serie de cargas se desplaza con una velocidad marcada por el vector $\vec{v}$, y una parte de ellas atravesará la superficie *S*. Si suponemos que todas las cargas tienen el mismo valor, se mueven con idéntica velocidad y, además, esta es constante, podéis deducir que la cantidad de carga que hay dentro del volumen indicado corresponde a la que ha atravesado la superficie *S* durante un tiempo determinado Δ*t*. Este número de cargas se denomina *intensidad de corriente*.

La **intensidad de corriente eléctrica** (*I*) es la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una superficie determinada (ΔQ) durante una unidad de tiempo (Δ*t*):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{42}$$

o en forma diferencial:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{43}$$

La unidad de medida de la intensidad en el SI es el **amperio**, que se simboliza con **A**. Un amperio es igual a un coulomb por segundo (1 A = 1 C/s)

***q* y Q**

En general, utilizaremos *q* para indicar el valor de cargas individuales y *Q* para el valor total provocado por la suma de una cantidad indefinida de cargas.

El amperio

Aunque en los inicios se definió el amperio (A) como una unidad derivada (1 C/s), en la actualidad, el amperio es una unidad fundamental del SI, y el resto de las unidades se define a partir de él:

$1\ \text{C} = 1\ \text{A} \cdot \text{s}$ y $1\ \text{V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}}$

Pero ¿cuál es la relación entre esta nueva magnitud y las magnitudes individuales que definen una carga en movimiento, es decir, el valor de la carga y su velocidad?

Podéis encontrar esta relación si os volvéis a fijar en la figura 14. Durante un momento determinado de tiempo Δ*t*, las cargas que han atravesado la superficie indicada habrán recorrido la distancia $\Delta l = |\vec{v}|\Delta t$. Si analizáis detenidamente la figura, realizáis un balance de la carga que hay dentro del volumen indicado y suponéis que este es infinitamente pequeño, llegaréis a la conclusión siguiente:

$$Id\vec{l} = I\vec{v}dt = \vec{v}dq \tag{44}$$

donde hemos empleado la ecuación (43).

Recordad

Espacio = velocidad × tiempo.

La intensidad de corriente es una medida de la magnitud de las cargas que se desplazan y de su velocidad. Sin embargo, el concepto de intensidad no incluye ninguna clase de información sobre cómo de juntas o separadas se encuentran las cargas entre sí. Por ejemplo, si volvemos al símil del agua, no es lo mismo que un cierto caudal de agua circule por un grifo que por un colector de agua que es varias veces más amplio. Este aspecto se puede tratar mediante el concepto de densidad de corriente.

2.1.2. Densidad de corriente

La densidad de corriente ($\vec{J}$) es una magnitud vectorial cuya dirección y sentido son los de la corriente eléctrica, y su módulo es la intensidad de corriente dividida por la superficie que atraviesa:

$$\|\vec{J}\| = \frac{I}{S} \tag{45}$$

En la figura 15 podéis visualizar un ejemplo que os ayudará a entender este concepto. En el ejemplo, una misma corriente eléctrica de intensidad constante se hace pasar por dos tramos con sección diferente. En concreto, la sección (b) es cuatro veces más pequeña que la de (a). Por tanto, aunque la intensidad es igual en ambas, no sucede lo mismo con la densidad de corriente, que en el segundo tramo será cuatro veces mayor que en el primero.

Figura 15

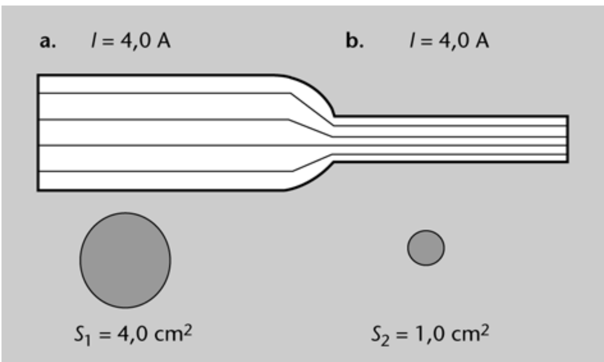


Figura 15

Representación gráfica del concepto de densidad de corriente. La intensidad de corriente I es la misma en todo el recorrido, pero como la sección en el tramo (b) es cuatro veces más pequeña que en (a), la densidad de corriente será cuatro veces mayor.

Ahora que ya conocéis el concepto de densidad de corriente, veremos cómo se expresa la intensidad de corriente en función de esta densidad. Si tenemos una superficie S cualquiera, a través de la cual pasa una cierta densidad de corriente $\vec{J}$, la intensidad de corriente total que atraviesa la superficie será:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{46}$$

La expresión (46) ya tiene en cuenta el sentido de todas las corrientes que atraviesan la superficie *S*, de manera que la intensidad *I* representa la intensidad total o neta, es decir, el balance entre las corrientes que atraviesan la superficie en un sentido y otro.

Para acabar con los conceptos de intensidad y densidad de corriente, y antes de entrar en materia en el estudio de los campos que generan las corrientes, es necesario conocer otro concepto clave: la ecuación de continuidad.

2.1.3. La ecuación de continuidad

Considerad una superficie cerrada cualquiera en la que entran y salen cargas eléctricas a causa de corrientes eléctricas, como la de la figura 14. Supongamos que en el interior de esta superficie hay una cierta cantidad de carga. Durante un intervalo de tiempo determinado, el balance entre la carga que entra y la que sale de aquella debe ser por fuerza igual al aumento de la carga que hay en el interior:

$$(I_{entrante} - I_{saliente})\Delta t = \Delta Q_{int} \tag{47}$$

$$I_{neta} = \frac{\Delta Q_{int}}{\Delta t} \tag{48}$$

donde I_{neta} corresponde a la intensida total o neta resultante del balance entre la corriente que entra y la que sale. Esta intensidad podemos sustituirla por la expresión equivalente en función de la densidad de corriente (46):

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\Delta Q_{int}}{\Delta t} \tag{49}$$

Y, si consideramos intervalos de tiempo muy pequeños, se convierte en:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial Q_{int}}{\partial t} \tag{50}$$

Por otro lado, podemos tomar el segundo término de la ecuación anterior y expresarlo en función de la densidad de carga (ρ):

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \tag{51}$$

Esta es la **ecuación de continuidad**.

Recordad

La densidad de carga ρ corresponde a la cantidad de carga por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \rightarrow dQ = \rho dV$$

Y por tanto:

$$Q = \int_V \rho dV$$

Donde *V* corresponde al volumen donde está ρ.

Para entender el concepto de la ecuación de continuidad, podéis hacer una analogía entre la corriente eléctrica y un depósito de agua. La intensidad correspondería al caudal de agua (cantidad de agua por unidad de tiempo) que entra o sale del depósito. El balance entre el caudal del agua que entra y el de la que sale será el ritmo de crecimiento o decrecimiento del nivel de agua en el depósito.

Ya hemos explicado el concepto de corriente eléctrica y hemos definido la intensidad. Si recordáis, al principio del apartado hemos dicho que estudiaríamos los efectos de las cargas en movimiento. Esto es lo que haremos a continuación, y utilizaremos precisamente el concepto de intensidad.

2.2. Campo magnético inducido

Tal como hemos visto en el apartado de repaso de electrostática, todas las cargas eléctricas crean un campo eléctrico que interacciona con las cargas que se encuentran dentro de su región de influencia. Las cargas en movimiento y, por tanto, las corrientes eléctricas crean un campo. Sin embargo, y dado que las cargas que lo generan ya no se encuentran en reposo, este campo no tendrá las mismas características que los campos electrostáticos que hemos explicado hasta ahora. A este campo lo denominaremos *campo de inducción magnética* y lo simbolizaremos con el símbolo $\vec{B}$.

> El campo generado por cargas en movimiento se denomina **campo de inducción magnética** o, de manera abreviada, **campo magnético**, y se simboliza con el símbolo $\vec{B}$.

Campo magnético $\vec{B}$

El campo de inducción magnética $\vec{B}$ se suele denominar, por el abuso del lenguaje, **campo magnético** a secas.

También es habitual, en ámbitos como la electrotecnia, denominar este campo **densidad de flujo magnético**.

En la figura 16 podéis ver algunos ejemplos de campos de inducción magnética creados por dos tipos de distribuciones de corrientes eléctricas: un hilo de corriente rectilínea e infinita (figura 16a) y una espira (circuito cerrado) de corriente circular (figura 16b).

Figura 16

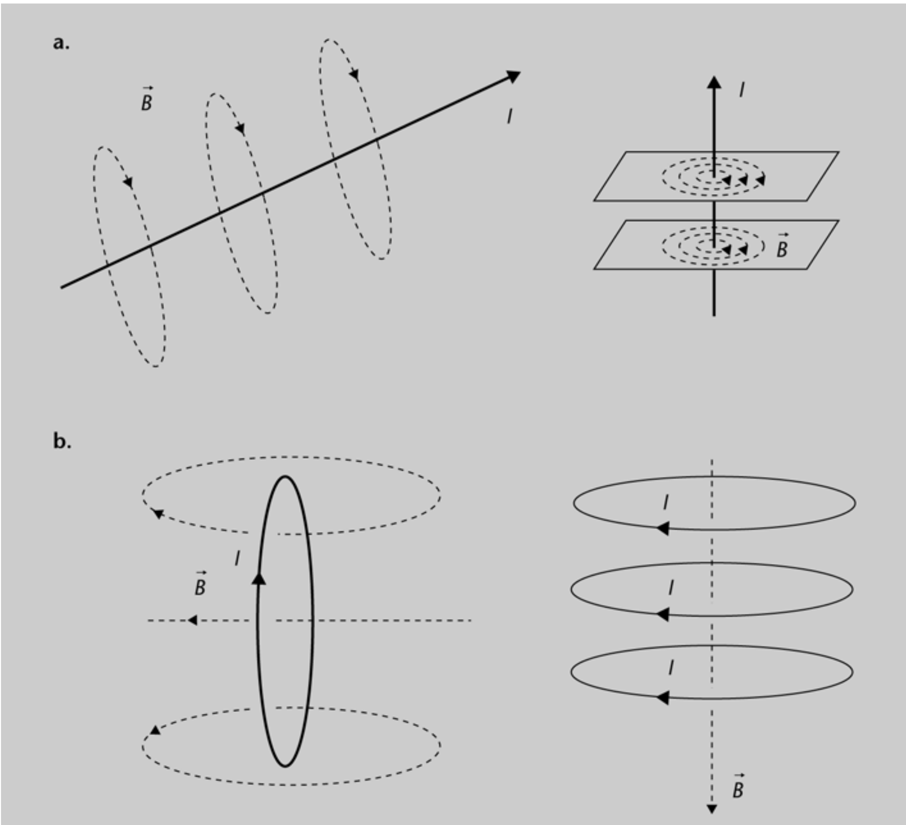


Figura 16

Ejemplos de campos de inducción magnética creados por:

a. un hilo de corriente rectilínea e infinita,

b. una espira de corriente circular.

Podéis observar que, en todos los ejemplos de la figura, el vector campo de inducción magnética $\vec{B}$ es siempre perpendicular a la dirección del movimiento de las cargas.

Anteriormente introdujimos el concepto de líneas de campo como una representación gráfica de las características del campo electrostático en una región. Podéis seguir el mismo procedimiento para el campo de inducción magnética si dibujáis las líneas de campo como representación de este campo $\vec{B}$.

Podéis ver el concepto de líneas de campo como una representación gráfica de las características del campo electrostático en una región en el subapartado 1.1.1 de este módulo.

2.2.1. Líneas de campo magnético

Las líneas de campo magnético son una representación gráfica y cualitativa de las características del campo de inducción magnética $\vec{B}$ en una región determinada.

La figura 17 muestra tres ejemplos de distribuciones de líneas de campo.

Figura 17

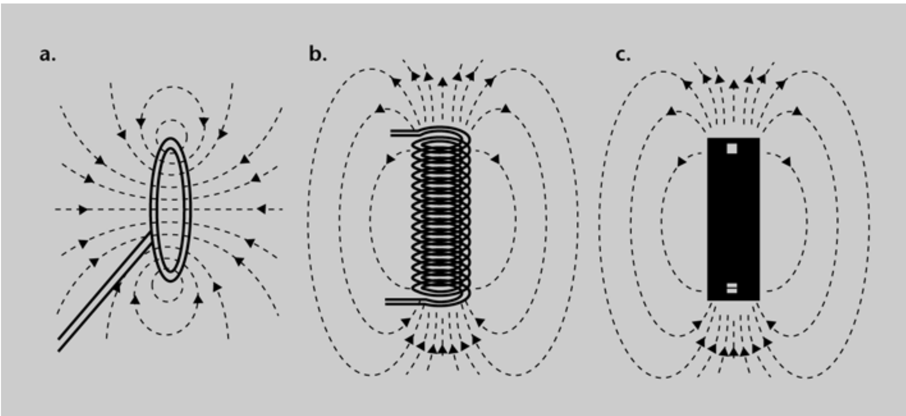


Figura 17

La figura muestra las líneas de campo magnético inducido correspondientes a:

a. una espira de corriente,

b. un conjunto de espiras de corriente y

c. un imán permanente.

- El primer caso (figura 17a) corresponde a una espira circular. Podéis comprobar que las líneas de campo no tienen ni principio ni final (las líneas que parecen acabar fuera del dibujo en realidad también son cerradas, simplemente no caben en este dibujo). La única excepción aparente es la línea que pasa por el centro de la espira. En este caso lo que sucede es que su recorrido es tan grande que parece que sea recta.

- El segundo ejemplo (figura 17b) muestra las líneas de campo en un solenoide de recto. Podéis comprobar que las líneas de campo en el interior del solenoide se hallan muy juntas y esto indica que la intensidad del campo magnético es grande. También podéis observar que son casi paralelas, lo que indica que el campo es uniforme.

Recordad

Un solenoide es una serie de espiras colocadas una a continuación de la otra.

- El tercer ejemplo (figura 17c) lo hemos incluido para demostrar la equivalencia entre el campo magnético inducido por el imán y el del solenoide del caso anterior. Este ejemplo es una de las pruebas más visibles de que la electricidad y el magnetismo son dos manifestaciones de la misma interacción.

De los ejemplos anteriores podéis sacar una conclusión muy interesante. Observaréis que las líneas de campo no tienen ni principio ni final, sino que son siempre curvas cerradas, en otras palabras, no existen “cargas magnéticas” donde comiencen o acaben las líneas.

Como en el caso del campo eléctrico, se debe cuantificar el número de líneas de campo. Lo haremos también con el concetpo de flujo, aplicado ahora al campo magnético. Además, nos permitirá ver que, efectivamente, no hay cargas magnéticas.

2.2.2. Flujo de campo magnético

La definición de flujo magnético es análoga a la definición de flujo para cualquier campo de fuerza, incluido el campo electrostático que hemos visto en el apartado 1. El flujo magnético es, igual que el flujo eléctrico, una magnitud escalar, no vectorial. Conceptualmente se puede entender como el número de líneas de campo que atraviesan una superficie.

Se define el **flujo (Φ_B) de un campo magnético** $\vec{B}$ a través de una superficie $\vec{S}$ como la integral, extendida en toda la superficie, de la **componente perpendicular** del campo magnético sobre ella:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (52)$$

La unidad de medida del flujo magnético en el Sistema Internacional de Unidades es el **weber** (**Wb**)

Φ_B se lee “fi sub be”.

De la misma manera que en el caso del campo electrostático, también se puede aplicar el teorema de Gauss para el campo magnetostático. Observaréis que el resultado es muy interesante.

El weber (Wb)

Algunas equivalencias del weber (que se lee “veber”con otras combinaciones de unidades del SI son:

1 Wb = 1 V · s = 1 T · m^2

2.2.3. Ley de Gauss para el campo magnetostático

La ley de Gauss aplicada al campo magnetostático presenta un resultado muy curioso. Para cualquier superficie cerrada, sea cual sea su forma y medida, el balance de flujo magnético que la atraviesa debe ser siempre cero. La figura 18 os permitirá visualizar este concepto.

Figura 18

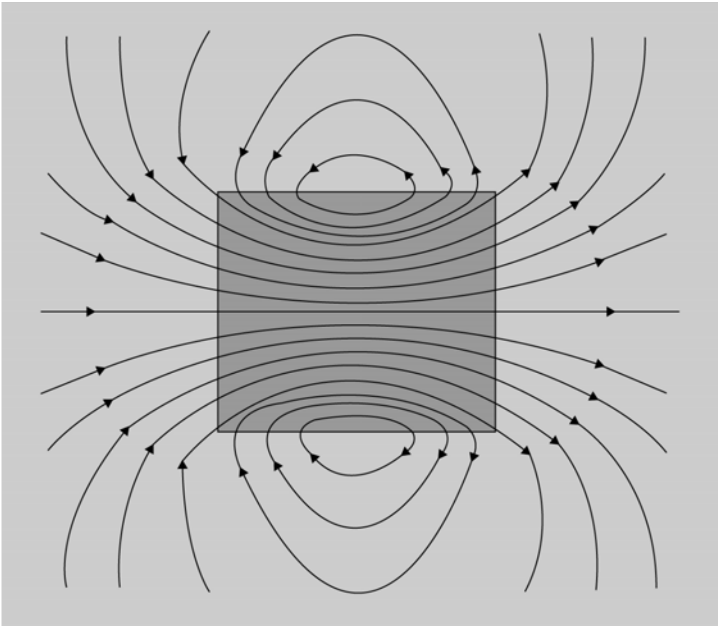


Figura 18

La figura permite visualizar que el flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada es siempre cero.

En el ejemplo de la figura se muestra una serie de líneas de campo magnético (recordad que las líneas de campo magnético son siempre cerradas). El flujo a través de la superficie cerrada indicada con un color más oscuro corresponde al balance entre las líneas que entran y las que salen. Podéis comprobar que el flujo es cero, ya que el número de líneas que entran es el mismo que el de las que salen. Lo mismo sucederá para cualquier superficie cerrada.

La **ley de Gauss** aplicada al campo magnetostático ($\vec{B}$) dice que el balance de flujo de campo magnético (Φ_B) que atraviesa una **superficie cerrada** cualquiera es siempre igual a cero:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (53)$$

donde S es una superficie cerrada cualquiera. El símbolo $\oint_S$ indica integral extendida a toda la superficie cerrada.

Este hecho se explica porque, como hemos señalado en el apartado anterior, no existen "cargas magnéticas" donde puedan comenzar o acabar las líneas de campo y, por tanto, el número de líneas que "entran" en la superficie debe ser el mismo que el de las que "salen".

Una vez introducido el concepto de flujo magnético, pasaremos a estudiar un concepto muy relacionado: la divergencia de un vector o de un campo vectorial.

2.2.4. Divergencia de un vector

Anteriormente introdujimos el operador nabla ($\vec{\nabla}$) como un vector cuyas coordenadas eran las derivadas parciales respecto a cada una de las variables y

Podéis ver el operador nabla ($\vec{\nabla}$) en el subapartado 1.2.1 de este módulo.

vimos que con él se podían realizar tres operaciones: gradiente (que ya explicamos), divergencia y rotacional. Dejamos la última para más adelante y nos centramos ahora en la divergencia.

La divergencia es el producto escalar del operador nabla ($\vec{\nabla}$) por una magnitud vectorial. Su expresión matemática es:

$$\operatorname{div}\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (54)$$

Recordad

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se calcula de la manera siguiente:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

donde $\vec{u}$ es un vector genérico cualquiera, de coordenadas $u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$.

Dado que el producto escalar entre dos vectores es una magnitud escalar, la divergencia también lo será. Veamos qué representa esta magnitud.

Imaginaos un cubo imaginario infinitamente pequeño ubicado en una región determinada del espacio donde está definido un campo vectorial, como podría ser un campo eléctrico o un campo magnético. Para simplificar, supondremos que las caras del cubo están encaradas en las direcciones *x*, *y* y *z*. En la figura 19 podéis visualizar este cubo.

Figura 19

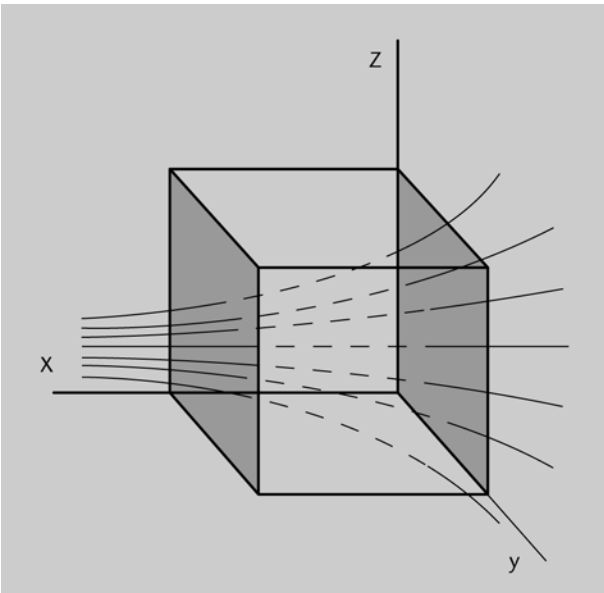


Figura 19

La figura permite visualizar el concepto de divergencia de un campo vectorial.

Calcular la divergencia en un punto del interior del cubo significa evaluar las derivadas parciales respecto a cada una de las direcciones de las caras y sumarlas. Si en una cierta dirección la derivada parcial es positiva, significa que el campo será creciente en esa dirección. Y dado que la magnitud de un campo vectorial se representa mediante la densidad de líneas de campo, esto significará que en un extremo deberá haber más líneas de campo que en el otro. Y estas líneas de campo de más o menos, ¿por dónde entran o salen? Pues, según el teorema de Gauss, existen dos posibilidades:

- Las líneas de campo nacen o mueren dentro del cubo, o
- las líneas de campo entran o salen por alguna de las otras caras del cubo.

El primer caso es el que teníamos en la ley de Gauss para el campo electrostático, donde vemos que estaban las cargas, es decir, las fuentes del campo electrostático, que eran los puntos donde nacían o morían las líneas de campo. De hecho:

Podéis ver la ley de Gauss en el subapartado 1.1.3 de este módulo.

Una **divergencia** diferente de cero de un campo indica que hay puntos donde nacen o mueren líneas de campo.

Supongamos que no es posible el primer caso, es decir, que dentro del cubo no existe ninguna fuente de líneas de campo. Si se trata de un campo magnetostático, esta suposición siempre es cierta, según la ley de Gauss para el campo magnetostático (53). Si se trata de un campo electrostático, esto se traduce en que debemos suponer que no hay ninguna carga eléctrica en el interior, según la ley de Gauss para el campo electrostático (8). Esto implica que debemos optar por la segunda posibilidad, es decir, que las líneas de campo que entran por una dirección deben salir por la otra. En otras palabras, las derivadas parciales en las respectivas direcciones se deben cancelar entre sí y la divergencia debe ser cero.

Dado que en el campo magnetostático esta suposición siempre es cierta, tendremos que su divergencia es siempre cero.

La **divergencia** de un campo magnetostático es siempre cero:

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (55)$$

Más adelante veremos que la conclusión que se puede extreaer de la ecuación (55) es una manera alternativa de enunciar la ley de Gauss para el campo magnetostático (53). Esta ley es muy interesante desde el punto de vista de las consecuencias que implica: la inexistencia de “cargas magnéticas”. Sin embargo, la ley de Gauss para el campo magnetostático no tiene la misma utilidad que su aplicación al caso del campo electrostático, ya que no incluye la relación entre el campo magnético y sus causas (recordad que la ley de Gauss para el campo electrostático sí que lo hace: relaciona el campo electrostático en una región con las cargas que lo generan). Esta relación la encontraremos con una nueva ley que introduciremos a continuación: la ley de Ampère-Maxwell.

2.2.5. Ley de Ampère-Maxwell

Cuando introdujimos la ley de Gauss para el campo electrostático (8), vimos que el flujo de campo que atraviesa una superficie cerrada viene determinado únicamente por la carga en su interior. La ley de Ampère, que recibe el nombre de su descubridor, el francés A. M. Ampère, relaciona la circulación del campo magnético a lo largo de un recorrido cerrado con la corriente eléctrica que lo atraviesa. Pero ¿qué es la circulación de un campo?

André-Marie Ampère

Físico y matemático (20 de enero de 1775-10 de junio de 1836) que está considerado el padre de la electrodinámica (el estudio de campos eléctricos y magnéticos variables).

La circulación del campo magnético $\vec{B}$ alrededor de un recorrido cerrado C cualquiera se define como la integral de línea del campo a lo largo de todo el recorrido:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{56}$$

Circulación de un campo

La circulación de un campo vectorial $\vec{u}$ alredor de un recorrido cerrado C cualquiera se define como la integral de línea del campo a lo largo de todo el recorrido:

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Conceptualmente, se puede entender como la suma de las componentes **tangenciales** del campo en todos los tramos infinitesimales del recorrido.

Observad que el hecho de que la integral contenga un producto escalar implica que lo que se está realizando es la suma de las componentes **tangenciales** del campo en todos los tramos infinitesimales del recorrido. Recordad que, para el flujo de campo, aun utilizando también el producto escalar, la componente que se tenía en cuenta era la perpendicular. El motivo de esta diferencia es que los vectores de superficie se definen siempre perpendiculares a las superficies, mientras que los vectores de línea se definen paralelos a la línea.

La **ley de Ampère** establece que la circulación del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de un recorrido cerrado C depende de la corriente que atraviesa la superficie imaginaria S que dibuja el circuito. Su expresión matemática es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{57}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío e I es la intensidad de corriente eléctrica que atraviesa la superficie. $d\vec{l}$ es el camino recorrido.

En la figura 20 podéis visualizar en un ejemplo los elementos que hemos utilizado en la expresión (57). C es el recorrido cerrado y S es la superficie que determina este recorrido. La intensidad de corriente eléctrica (I) es la intensidad "neta", es decir, el balance entre las intensidades de las corrientes que atraviesan la superficie en un sentido y las de las que lo hacen en el otro. Así, por ejemplo, si tenemos dos corrientes eléctricas con la misma intensidad pero con sentidos opuestos, lo que tendremos es que la circulación del campo magnético por un circuito cerrado que envuelva ambas corrientes será igual a cero.

Figura 20

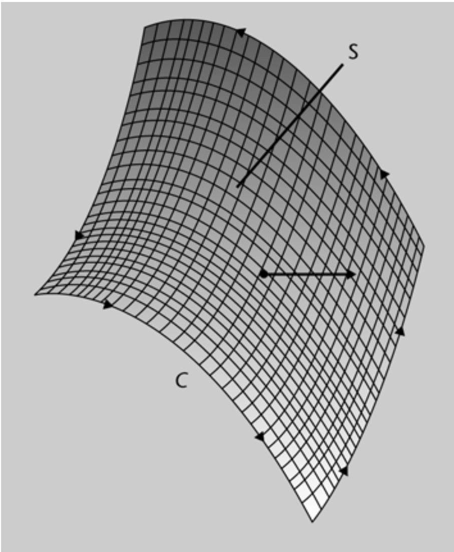


Figura 20

Visualización de los elementos que aparecen en el enunciado de la ley de Ampère (57).

Podéis ver que la ley de Ampère expresa la relación entre el campo magnético y una de sus causas: las corrientes eléctricas. Sin embargo, a diferencia de las leyes de Gauss que ya hemos visto, y que se cumplen siempre, la ley de Ampère, tal como está enunciada en (57), presenta algunas limitaciones y no siempre se puede aplicar de manera correcta.

Observad la figura 21, por ejemplo. En el dibujo aparecen dos superficies, S_1 y S_2, que están limitadas por el mismo recorrido cerrado C. El hilo de corriente está "interrumpido" por un condensador, de tal manera que una de sus placas se encuentra en un lado de S_2 y la otra en el lado opuesto.

Según la ley de Ampère "original" (57), las intensidades de corriente que atraviesan ambas superficies deberían ser idénticas, ya que el recorrido C es el mismo para ambas y, por tanto, también lo es la circulación del campo magnético $\vec{B}$. Sin embargo, en el ejemplo de la figura podéis comprobar que esto no es así. La superficie S_1 está atravesada por una intensidad I, mientras que la superficie S_2 no está atravesada por ninguna corriente. En otras palabras, la ley de Ampère lleva a una contradicción.

Figura 21

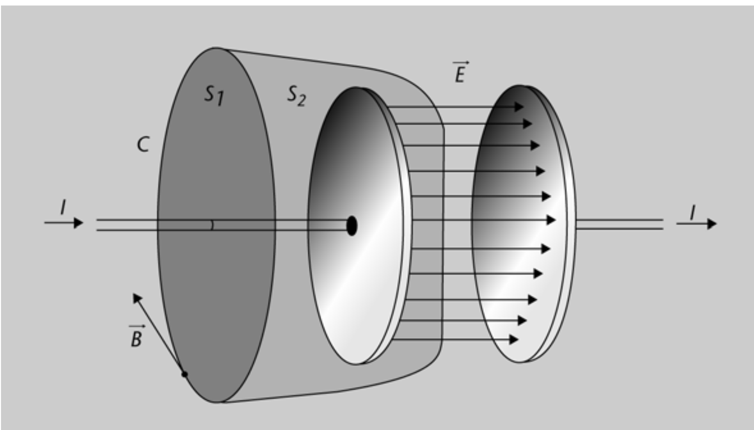


Figura 21

Visualización de un ejemplo de una configuración donde la ley de Ampère (57) no es válida.

La primera persona que propuso una "solución" para este problema fue el escocés J. C. Maxwell. Maxwell añadió a la expresión (57) un término que depende de la variación del flujo de campo eléctrico. Este nuevo término se denomina **corriente de desplazamiento**. La nueva ley de Ampère modificada con la inclusión de este término se denomina, en honor a Maxwell, ley de Ampère-Maxwell.

James Clerk Maxwell

Físico teórico y matemático escocés (13 de junio de 1831-5 de noviembre de 1879), considerado el científico más importante en relación a la teoría conjunta del electromagnetismo.

La **ley de Ampère-Maxwell** enuncia que la circulación del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de un recorrido cerrado C depende de la intensidad de corriente eléctrica y de la variación del flujo eléctrico que atraviesa la superficie imaginaria S que dibuja el recorrido. Su expresión matemática es:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right) \qquad (58)$$

donde μ_0 y ε_0 son la permeabilidad y la permitividad del vacío, I es la intensidad de corriente eléctrica que atraviesa la superficie, Φ_E es el flujo de campo eléctrico y $d\vec{l}$ es el camino recorrido.

Por otro lado, se define la corriente de desplazamiento, I_D, como:

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}d\vec{S} \qquad (59)$$

donde fijaos en que es el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie $\vec{S}$

Por tanto, también podemos escribir la ley de Ampère-Maxwell como:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I + I_D\right)$$

La permeabilidad del vacío (μ_0), también denominada *constante magnética*, es una de las constantes físicas universales. Su valor es:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 1{,}256\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \qquad (60)$$

Φ_E **se lee "fi sub e".**

Nota

Fijaos en que $\vec{S}$ no es una superficie cerrada en el caso de la ley de Ampère-Maxwell.

μ_0 **se lee "mu sub-cero".**

Fijaos en que la ley de Ampère-Maxwell nos está diciendo que, a partir de un flujo de campo eléctrico que varíe con el tiempo, se obtiene un campo magnético.

Una vez ya conocemos las propiedades y características del campo magnético, y de manera análoga a como hemos procedido para el campo eléctrico, pasemos a estudiar los efectos que tendrá un campo magnético sobre una carga situada dentro de su radio de acción. Es decir, cómo es la fuerza magnética.

2.2.6. Efectos del campo magnético: fuerza magnética

Ya hemos estudiado la fuerza electrostática, es decir, la fuerza que experimentan las cargas eléctricas cuando se encuentran en un región donde existe un

Podéis ver la fuerza electrostática en el apartado 1 de este módulo.

campo eléctrico. Vimos que la magnitud de esta fuerza correspondía a la magnitud del campo electrostático multiplicada por la carga, de tal manera que el conocimiento del campo electrostático en una región nos permitía determinar, en todo momento y de modo inmediato, la fuerza electrostática experimentada por cualquier carga.

Con el campo magnetostático sucede un hecho similar, pero con una diferencia notable. De la misma manera que el origen de los campos magnetostáticos es el movimiento de las cargas eléctricas, la fuerza magnética solo afecta a cargas que se encuentren en movimiento. En otras palabras, una carga en reposo no experimenta ninguna fuerza magnética.

Otra peculiaridad de la fuerza magnética es que su dirección no es la misma que la del campo magnético. La fuerza electrostática se calculaba de forma directa multiplicando el campo electrostático ($\vec{E}$) por el valor de la carga (q). Dado que el valor de la carga es una magnitud escalar, la dirección de la fuerza era la misma que la del campo. En el caso del campo magnético, esto no es así. La dirección de la fuerza magnética es perpendicular a la del campo.

Recordad

La fuerza electrostática experimentada por una carga es el producto del campo electrostático por el valor de la carga:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Podéis ver el cálculo de la fuerza electrostática en el subapartado 1.1.4 de este módulo.

La **fuerza magnética** experimentada por una carga puntual q que se mueve por una región donde existe un campo magnético con velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{61}$$

donde $\vec{B}$ es el valor del campo en el punto en el que se encuentra la carga.

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores es un tercer vector con dirección perpendicular a los dos primeros. Se calcula de la manera siguiente:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

La fuerza magnética es una magnitud vectorial y, como tal, tendrá un módulo, una dirección y un sentido:

1) Módulo

El módulo o intensidad de la fuerza magnética es:

$$F = qvB \text{ sen } \alpha \tag{62}$$

donde α es el ángulo que forman la velocidad de la carga y el campo magnético.

Módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores se puede calcular de modo independiente de si conocemos el ángulo que forman los dos vectores:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| \text{sen}\alpha$$

De la expresión anterior podemos deducir algunas propiedades:

- Una carga en reposo ($v = 0$) no se verá afectada por el campo magnético.
- Una carga que se desplace de forma **paralela** a la dirección del campo magnético ($\alpha = 0$) no se verá afectada, ya que sin 0 = 0.

- El módulo de la fuerza será mayor cuanto más grande sea el ángulo entre las direcciones del campo magnético y del movimiento de la carga. El valor máximo lo encontraremos cuando la carga se desplace de manera **perpendicular** (α = 90°) al campo magnético.

- El módulo de la fuerza será proporcional a su carga, a su velocidad y a la intensidad del campo magnético.

2) Dirección

Dado que en la expresión (61) aparece el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, la dirección de la fuerza ($\vec{F}$) siempre es perpendicular tanto a la velocidad ($\vec{v}$) de la carga como a la dirección del campo magnético ($\vec{B}$).

3) Sentido

Como en el caso de la fuerza electrostática, el sentido del vector de la fuerza magnética viene marcado por el signo de la carga. La determinación del sentido, sin embargo, no es tan inmediata como en el caso del campo eléctrico, a causa de la presencia del producto vectorial.

En la figura 22 podéis ver una regla mnemotécnica muy habitual para este propósito. Si se coloca la mano derecha en la posición de la figura, con el dedo índice señalando la dirección y el sentido del primer vector y el dedo corazón la del segundo vector, el pulgar señalará la dirección y el sentido del vector resultante del producto vectorial.

Figura 22

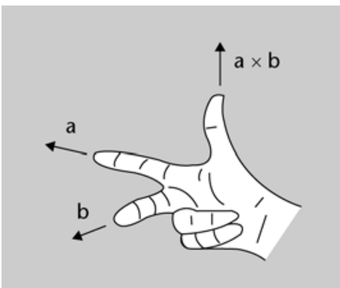


Figura 22

Aplicación de la regla mnemotécnica de la mano derecha para la determinación del sentido de un vector resultante de un producto vectorial.

Podéis encontrar un vídeo explicativo de esta regla en:

http://www.youtube.com/watch?v=4AaSbM0okqM

La regla de la mano derecha indica el sentido del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, pero hay que tener en cuenta también el signo de la carga:

- Si la carga es **positiva**, el sentido de la fuerza magnética será el que indique el resultado del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$.

- Si la carga es **negativa**, el sentido será el opuesto.

Podéis ver el cálculo de la fuerza electrostática en el subapartado 1.1.4 de este módulo.

Podéis ver la relación entre intensidad y velocidad en el subapartado 2.1.1 de este módulo.

Para determinar la fuerza magnética experimentada por una corriente eléctrica, deberemos proceder de forma análoga a como lo hemos hecho para calcular la fuerza electrostática, es decir, integrar para todas las cargas que circulan. Para conseguirlo, utilizaremos la relación (44) :

$$I d\vec{l} = \vec{v} dq \tag{63}$$

La fueza magnética $\vec{F}$ experimentada por una corriente eléctrica circulando por un circuito cerrado C con una intensidad de corriente I es:

$$\vec{F} = \oint_C I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{64}$$

donde $\vec{B}$ es el valor del campo en el punto en el que se encuentra cada uno de los diferenciales de circuito $d\vec{l}$.

Ahora que ya conocéis el concepto de campo magnetostático, sus propiedades y sus efectos sobre otras cargas (la fuerza magnética), procederemos de manera análoga a como hecho anteriormente y estudiaremos el potencial magnético y la energía magnética.

2.3. Potencial vectorial magnético

Anteriormente, al hablar del campo electrostático, introdujimos el concepto de potencial electrostático como una medida de la energía "almacenada" por las cargas eléctricas por el simple hecho de encontrarse en una posición determinada (recordad que hicimos la analogía con el potencial gravitatorio y la altura a la que se encuentran los cuerpos). En el campo magnetostático podemos introducir un concepto similar, pero con algunas pequeñas diferencias.

Podéis ver el potencial electrostático en el subapartado 1.2 de este módulo.

Para empezar, recordad que la fuerza magnética siempre es perpendicular al campo magnético y las líneas de campo magnético no indican la dirección del gradiente de potencial, sino su perpendicular. Además, recordad que las líneas de campo son curvas cerradas sin principio ni final. Por tanto, el campo magnético no se puede expresar como el gradiente de un potencial escalar.

Podéis ver la dirección de la fuerza magnética con relación al campo magnético en el subapartado 2.2.6 de este módulo.

No obstante, existe un concepto similar que sí que podréis utilizar para este propósito. Se trata del **potencial vectorial magnético**, que simbolizamos con $\vec{A}$.

Antes, sin embargo, deberemos introducir una última herramienta matemática relacionada con el operador nabla ($\vec{\nabla}$) y que ya mencionamos anteriormente: el rotacional.

Podéis ver el operador nabla ($\vec{\nabla}$) en el subapartado 1.2.1 de este módulo.

2.3.1. Rotacional de un vector

El rotacional de un vector se define como el producto vectorial del operador nabla ($\vec{\nabla}$) por una magnitud vectorial. Su expresión matemática es:

$$\text{rot}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (65)$$

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores es un tercer vector con dirección perpendicular a los dos primeros. Se calcula de la siguiente manera:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

Dado que el producto vectorial entre dos vectores es una magnitud vectorial, el rotacional también lo será. Veamos qué representa esta magnitud.

El rotacional de un campo vectorial expresa su tendencia a la rotación respecto a un eje determinado. Si un campo presenta, en una región determinada, un rotacional con una gran magnitud, esto implica que en aquella región predominan los componentes tangenciales respecto a un cierto punto o eje. Por el contrario, si un campo presenta un rotacional igual a cero, significa que aquel campo solo presenta componentes radiales.

Por ejemplo, si imagináis una bañera llena de agua después de quitarle el tapón, obsevaréis que la tendencia del agua es girar o rotar alrededor de un eje que pasa por la vertical del tapón, es decir, se crea un vórtice. Si podéis considerar la velocidad del agua como un campo vectorial (la velocidad es una magnitud vectorial, dado que tiene módulo y dirección), observaréis que en este predominarán las componentes tangenciales. Por tanto, se tratará de un campo con un rotacional alto.

En cambio, si imagináis la misma agua pero fluyendo por el canal de desagüe, veréis que el movimiento del agua es prácticamente rectilíneo. Se tratará, pues, de un campo con rotacional cero.

Volviendo a los campos eléctrico y magnético, podéis comprobar que:

- El **campo** electrostático presenta siempre, suponiendo que no existe ninguna otra interacción que lo modifica, un rotacional igual a cero. Esto es porque se trata de un campo vectorial con dirección radial y no tangencial respecto a la carga que lo crea.

- Por el contrario, el **campo magnético** presenta en general un rotacional diferente de cero, ya que su tendencia es tener componentes tangenciales (repasad los ejemplos de la figura 16).

Rotacional cero

En realidad, el campo electrostático no presenta siempre rotacional cero, ya que los campos magnéticos externos pueden inducir un campo eléctrico si no son estacionarios. Pero esto lo veremos más adelante...

Podéis ver la dirección del campo electrostático en el subapartado 1.1.1 y la dirección del campo magnético en el subapartado 2.2 de este módulo.

Ya hemos introducido el concepto de rotacional. A continuación lo aplicaremos al caso que nos interesa: el potencial vectorial magnético.

2.3.2. El campo magnético como rotacional del potencial vectorial magnético

Si recordáis, introdujimos el concepto de potencial escalar como una función cuyo gradiente era el campo electrostático y vimos que esta función expresaba la energía por unidad de carga del campo.

Podéis ver el potencial escalar en el subapartado 1.2.1 de este módulo.

Para el campo magnético podemos hacer algo similar, pero debemos utilizar un potencial vectorial y operar con el rotacional en lugar del gradiente (recordad que, debido a su naturaleza, no es posible expresar el campo magnetostático como gradiente de ninguna función escalar).

Definimos el **potencial vectorial magnético** como un vector $\vec{A}$ cuyo rotacional es el campo magnético $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{66}$$

La unidad de medida del potencial vectorial magnético $\vec{A}$ en el Sistema Internacional es el **voltio-segundo por metro** (Vs/m)

El potencial vectorial magnético es una magnitud vectorial y su dirección siempre es perpendicular al campo magnético.

Así, ya hemos visto, por un lado, los efectos de las cargas eléctricas en reposo y, por otro, los de las corrientes eléctricas en estado estacionario (intensidad constante). Nos queda dar un paso más allá. Debemos estudiar qué sucede cuando trabajamos con corrientes eléctricas variables. La primera conclusión que podemos extraer es que el campo magnético que generan, según las expresiones vistas hasta ahora, también deberá ser variable. Pero ¿qué sucede cuando un campo magnético no es estacionario? Aquí es donde entra en juego la ley de inducción de Faraday.

2.4. Ley de inducción de Faraday

Seguramente habréis observado alguna vez que cuando encendéis o apagáis un aparato eléctrico o electrónico se producen pequeñas “interferencias” sobre otros dispositivos de alrededor. En un primer momento podríais concluir que el proceso de encendido o apagado implica un cambio brusco en el valor del flujo de campo eléctrico y, según la ley de Ampère-Maxwell (58), se genera un campo magnético ($\vec{B}$). Sin embargo, este campo magnético creado continúa sin explicar, según lo que os hemos explicado hasta ahora, los fenómenos producidos sobre los otros aparatos eléctricos o electrónicos. Esto se debe a que hasta ahora no hemos tratado los fenómenos que se producen en presencia de campos magnéticos variables.

La **ley de inducción de Faraday-Lenz** dice que en un circuito cerrado cualquiera se genera una **fuerza electromotriz inducida** o **fem inducida** (fem_{ind}) proporcional al ritmo de variación (es decir, a la derivada respecto al tiempo) del **flujo magnético** (Φ_B) que atraviesa la superficie imaginaria delimitada por el circuito

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{67}$$

Φ_B se lee "fi sub be".

$\frac{d\Phi_B}{dt}$ se lee "derivada de fi sub be respecto a te".

Ya sabemos qué es el flujo de campo magnético, pero ¿qué es la fuerza electromotriz (fem_{ind}) inducida? Lo veremos a continuación.

Michael Faraday

Físico y químico inglés (22 de setiembre de 1791-25 de agosto de 1867) que contribuyó de forma significativa en campos como el electromagnetismo y la electroquímica. Faraday descubrió, por ejemplo, la inducción magnética, el diamagnetismo y las leyes de la electrólisis.

Cuando se ubica un cable en una región en la que existe un campo magnético variable, los electrones notan una fuerza que los obliga a desplazarse a lo largo del cable. Ya vimos que el hecho de que aparezca una fuerza electrostática que haga desplazar una carga entre dos puntos implica que existe una diferencia de potencial entre estos puntos.

Podéis ver el flujo de campo magnético en el subapartado 2.2.2 y la diferencia de potencial en el subapartado 1.2.1 de este módulo.

La **fuerza electromotriz inducida** o **fem inducida** (fem_{ind} o ΔV) es la diferencia de potencial eléctrico o voltaje que se induce en un circuito, como consecuencia de una variación del flujo magnético que lo atraviesa.

Ya sabemos qué es la fem inducida y qué cantidad se genera, pero no sabemos en qué sentido lo hace y, por tanto, no podemos saber en qué sentido circulará la corriente eléctrica resultante a lo largo del circuito. Este sentido depende de dos factores:

- El sentido en el que el flujo atraviesa la superficie.
- Si el flujo aumenta o disminuye.

La respuesta a esta cuestión la encontramos mediante la ley de Lenz.

Heinrich Lenz

Físico ruso de origen alemán y estoniano (12 de febrero de 1804-10 de febrero de 1865). Trabajó en distintos ámbitos de la física.

Entre otras cosas postuló la ley de Lenz (1834), que estamos estudiando aquí, pero también está considerado el codescubridor, junto con el propio Joule, del efecto Joule (potencia calorífica desprendida en una resistencia eléctrica).

La **ley de Lenz** postula que el sentido de la corriente que circula por un circuito cerrado a causa de una fem inducida es tal que el campo magnético que se produce genera un flujo que intenta compensar la variación de flujo que ha generado la fem inducida. Este es el motivo por el que aparece un signo negativo (–) en la ecuación (67) .

Así, si el flujo aumenta, la corriente inducida generará un campo opuesto al original para compensar el aumento. Por el contrario, si el flujo disminuye, la corriente inducida generará un campo en la dirección del original para compensar la disminución.

Ejemplo de la ley de inducción de Faraday

El campo magnético en una cierta región del espacio es:

$$\vec{B} = 0{,}8 \cdot \cos 2t\,\vec{k}\ \text{(T)} \tag{68}$$

Figura 23

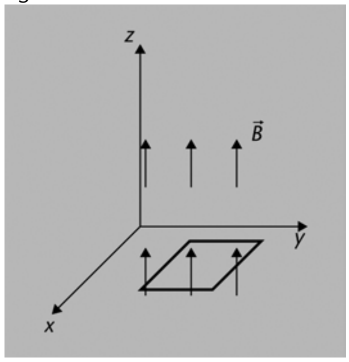


Figura 23

La imagen muestra la espira que se detalla en el ejemplo en el apartado (a).

En este misma región hay una espira de corriente cuadrada de 2 cm de lado. Determinad la diferencia de potencial que aparece en la espira en los casos siguientes:

a) la espira es paralela al plano *xy*
b) la espira es paralela al plano *xz*

Solución

La ley de inducción de Faraday enuncia que en un circuito cerrado cualquiera se genera una fuerza electromotriz inducida o fem (ΔV) proporcional al ritmo de variación (es decir, a la derivada respecto al tiempo) del flujo magnético (Φ_B) que atraviesa la superficie imaginaria delimitada por el circuito:

$$\Delta V = fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{69}$$

a) Dado que la espira es paralela al plano *xy* (podéis ver la figura 23), el campo magnético B siempre atravesará la espira de forma perpendicular. Por tanto, el flujo de campo magnético a través de la espira es:

$$\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos 0 = 0{,}8\cos 2t \cdot 0{,}02^2 \cdot 1 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\cos 2t \tag{70}$$

Figura 24

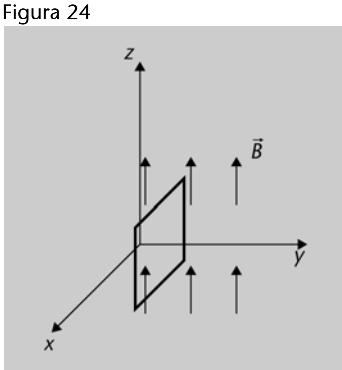


Figura 24

La imagen muestra la espira que se detalla en el ejemplo en el apartado (b).

Para determinar la diferencia de potencial, debemos derivar respecto al tiempo el flujo que acabamos de calcular:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-4}\sin 2t \tag{71}$$

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\text{sen } 2t\ \text{V} \tag{71b}$$

b) Dado que ahora la espira es paralela al plano *xz* (podéis ver la figura 24), el campo magnético B no la atravesará nunca, es decir, el flujo a través de la superficie será siempre cero. Por tanto, la diferencia de potencial es:

$$\Delta V = fem_{ind} = 0 \tag{72}$$

El descubrimento de la ley de Faraday supuso un nuevo hito dentro de la unificación de la electricidad y el magnetismo como una única interacción. Su importancia radica en que convierte en bidireccional una relación que hasta ahora se había visto como de sentido único. Si la ley de Ampère-Maxwell (58) estudiaba la generación de campos magnéticos a partir de unos campos eléctricos variables, ahora nos encontramos el camino inverso: la demostración de que un campo magnético variable también crea un campo eléctrico.

Podéis ver la ley de Ampère-Maxwell en el subapartado 2.2.5 de este módulo.

Así pues, ya tenemos el círculo cerrado. Los campos eléctricos variables generan campos magnéticos, y los campos magnéticos variables generan campos eléctricos. Hasta ahora hemos introducido todos los conceptos necesarios relacionados con estos fenómenos aplicados al caso en el que en la región afectada está el vacío.

Podéis ver el caso de los campos eléctricos en el apartado 1 de este módulo.

Pero, tal como ya hemos explicado también para el caso de los campos eléctricos, en el mundo real la mayoría de los campos magnéticos se encuentran en medios materiales con características muy distintas. Incluso el aire presenta una cierta desviación, aunque ligera, respecto a este comportamiento magnético "ideal" correspondiente al vacío. En el punto siguiente estudiaremos cómo es este comportamiento.

2.5. Magnetismo en presencia de medios materiales

Para determinar cómo se comportan los materiales en presencia de un campo magnético, en primer lugar debéis recordar que, tal como ya habéis visto, los campos magnéticos sólo afectan a las cargas que están en movimiento, no en reposo. Un ejemplo de estas cargas son los electrones que se encuentran en todos los átomos de todos los materiales.

Electrones en un átomo = cargas en movimiento

Los electrones en un átomo son cargas en movimiento y, por tanto, se ven afectados por los campos magnéticos.

Podéis ver los efectos de la fuerza magnética en el subapartado 2.2.6 de este módulo.

Los electrones son cargas eléctricas y, además, se encuentran continuamente girando alrededor de los núcleos de los átomos. Por tanto, se pueden considerar cargas en movimiento y se verán afectados por los campos magnéticos. A continuación estudiaremos cómo son los efectos de los campos magnéticos sobre los electrones de los átomos y, en consecuencia, cómo será el comportamiento magnético de los materiales.

Movimiento de los electrones

En realidad, los electrones no giran físicamente alrededor de los núcleos, sino que su comportamiento es bastante más complejo y responde a las leyes de la mecánica cuántica. Sin embargo, para los objetivos de este módulo, podemos considerar como si lo hicieran.

2.5.1. Magnetización

Podéis imaginar cada electrón que gira alrededor del nucleo del átomo como una miniespira de corriente y que, por tanto, generará un pequeño campo magnético en una cierta dirección, que denominamos **momento dipolar magnético** electrónico (figura 25a). Si sumamos los pequeños campos magnéticos generados para cada electrón de un átomo, lo que tendremos es que cada átomo presentará un pequeño campo magnético permanente, que denominamos *momento dipolar magnético atómico*. En la figura 25b podéis ver una representación de los átomos de un material como imanes diminutos con momentos magnéticos permanentes.

Figura 25

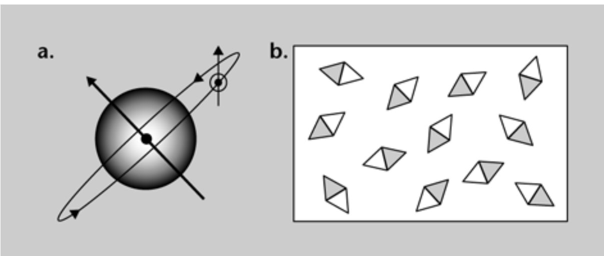


Figura 25

Representación esquemática de:

a. Momento dipolar magnético generado por un electrón.

b. Momentos dipolares atómicos que se cancelan entre sí.

Ahora bien, en la mayoría de los materiales encontramos que:

- Los electrones de un átomo están distribuidos por parejas, de tal modo que el momento dipolar magnético creado por un electrón en general se cancela con el de otro que crea un momento en dirección opuesta. Si todos los electrones están emparejados, los átomos no tendrán momento magnético permanente.

- Aunque hubiese algún electrón desemparejado, el número de átomos en un material es muy grande y, además, estos se encuentran distribuidos de manera totalmente aleatoria. Esto significa que para cada átomo que genere un momento dipolar magnético en una dirección y sentido, siempre habrá algún otro que genere uno igual pero en sentido contrario. En la figura 25b podéis comprobar, de manera muy básica y esquemática, que los momentos dipolares magnéticos de los átomos se cancelan entre sí de modo casi total.

Como conclusión, los dos puntos anteriores implican que, en ausencia de campos magnéticos externos, la mayor parte de los materiales presentan un momento dipolar magnético **cero**.

Pero de la misma manera que cuando un material es sometido a un campo eléctrico las cargas de sus átomos se redistribuyen y dan lugar a una polarización, cuando el material es sometido a un campo magnético sucede un fenómeno similar pero con sus cargas en movimiento: los electrones de los átomos.

Podéis ver la polarización en el subapartado 1.3 de este módulo.

Imaginaos que un cierto medio material se encuentra en una región donde existe un campo magnético externo, que denominaremos $\vec{B}_0$. Este campo afecta a los electrones de tal manera que modifica su movimiento inicial. Y esta variación en el movimiento de los electrones afectados provoca que el momento dipolar magnético total del material ya no sea cero. Cuando sucede esto, decimos que el material se ha magnetizado, y la cuantificación de este efecto se denomina **magnetización** ($\vec{M}$).

> La **magnetización** ($\vec{M}$) en un material es una medida de la dirección y la intensiad, por unidad de volumen, de los momentos dipolares magnéticos de las partículas cargadas de sus átomos. Esta magnetización puede ser natural (como en los imanes permanentes) o aparecer como respuesta a un campo magnético externo.
>
> La unidad de medida de la magnetización ($\vec{M}$) en el Sistema Internacional es el **amperio por metro** (A/m).

La magnetización ($\vec{M}$) tiene el mismo papel para el campo magnético que la polarización eléctrica ($\vec{P}$) para el campo eléctrico. En otras palabras, genera un campo magnético adicional que se debe sumar o restar, según el caso, al campo magnético externo, es decir, al campo magnético que ha causado la magnetización. Podemos realizar, por tanto, un proceso parecido al que habíamos hecho para obtener el desplazamiento eléctrico.

Podéis ver la obtención del desplazamiento eléctrico en el subapartado 1.3.1 de este módulo.

Esto significa que el campo magnético "real" o "efectivo" es el resultado de dos contribuciones: el campo magnético externo ($\vec{B}_0$) y el campo causado por la magnetización ($\mu_0\vec{M}$):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} \quad (73)$$

Podemos reescribir la ecuación (73) de la forma siguiente:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} \quad (74)$$

El nuevo término que hemos introducido ($\vec{H}$) se denomina **intensidad de campo magnético**.

En un medio material, se define la **intensidad de campo magnético** (**$\vec{H}$**) como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (75)$$

donde $\vec{B}_0$ es el campo magnético externo y μ_0 es la permeabilidad del vacío.

La unidad de medida de la intensidad de campo magnético ($\vec{H}$) en el Sistema Internacional es el **amperio por metro** (A/m).

Nombres alternativos para $\vec{H}$

El campo $\vec{H}$ se conoce con nombres muy distintos: *intensidad de campo magnético* o *campo magnético auxiliar*.

En algunos ámbitos, al campo $\vec{H}$ también se le denomina *campo magnético* a secas, pero cuando se utiliza esta denominación hay que ir con cuidado y diferenciarlo del campo $\vec{B}$, que en este texto lo denominamos también de esta manera. Este último en realidad es el *campo magnético inducido* o *campo de inducción magnética.*

La magnetización $\vec{M}$ y la intensidad de campo magnético $\vec{H}$ no son magnitudes independientes, sino todo lo contrario. Si recordáis, nos encontramos con el mismo caso cuando estudiábamos la relación entre la polarización y el campo electrostático y entonces definimos la permitividad eléctrica de los materiales como una medida de su polarización. A continuación aplicaremos un razonamiento similar pero aplicado a la magnetización.

Podéis ver la relación entre la polarización y el campo electrostático en el subapartado 1.3 de este módulo.

2.5.2. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas

La magnetización $\vec{M}$ de un material es una medida de la "respuesta magnética" a la presencia de un campo externo y, por tanto, su magnitud dependerá de la intensidad de campo magnético $\vec{H}$. Podemos proceder de manera análoga al caso de la polarización eléctrica y reescribir la ecuación (75) como una relación directa entre la magnetización y la intensidad del campo magnético:

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \quad (76)$$

χ es la letra griega khi, que se pronuncia "ji", con el sonido de la jota castellana.

La constante χ se denomina **susceptibilidad magnética** y es característica de cada material. Según el valor de la susceptibilidad podemos tener los casos siguientes:

- Un valor de susceptibilidad magnética (χ) positivo indica que el material se magnetiza en el mismo sentido que el campo magnético externo ($\vec{B}_0$) y, por tanto, el campo magnético “real” o “efectivo” ($\vec{B}$) es superior al que tendríamos sin la presencia del material.

- Un valor de χ negativo indica que el material se magnetiza en sentido contrario al campo magnético externo ($\vec{B}_0$). En otras palabras, la magnetización se opone al campo magnético que la ha creado y, por tanto, el campo magnético “efectivo” es inferior al que tendríamos sin la presencia del material.

- Un valor de χ próximo a 0 significa que casi no hay magnetización y, por tanto, que el material tendrá un comportamiento muy próximo al caso ideal del vacío.

En un medio material isótropo, homogéneo y lineal, se define la **susceptibilidad magnética** (χ) del material como la relación entre la magnetización ($\vec{M}$) y la intensidad de campo magnético ($\vec{H}$):

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \quad (77)$$

La susceptibilidad magnética (χ) es una magnitud adimensional, es decir, no tiene unidades de medida.

Medio isótropo, homogéneo y lineal

Un medio homogéneo es aquel en el que sus propiedades son las mismas en cualquier lugar.

Un medio isótropo es aquel en el que sus propiedades no dependen de la dirección.

Un medio lineal es aquel en el que la dependencia de la magnetización con el campo magnético es lineal.

Por otro lado, podéis reordenar la expresión (74) para encontrar una relación también directa entre las magnitudes $\vec{B}$ y $\vec{H}$:

– Sacamos μ_0 factor común:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \quad (78)$$

– Utilizamos la ecuación (77):

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) \quad (79)$$

– Sacamos $\vec{H}$ factor común:

$$\vec{B} = \mu_0\left(1 + \chi\right)\vec{H} \quad (80)$$

El producto $\mu_0(1 + \chi)$ se puede sustituir por una única constante, que denominaremos μ, y que corresponde a la **permeabilidad magnética** del material:

μ es la letra griega mu.

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (81)$$

Y, por tanto, tendremos:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (82)$$

La **permeabilidad magnética** (μ) de un material es la relación entre el campo magnético "real" o "efectivo" ($\vec{B}$) y la intensidad de campo magnético ($\vec{H}$):

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad (83)$$

La unidad de medida de la permeabilidad magnética (μ) en el Sistema Internacional es el **newton por amperio al cuadrado** (N/A^2)

La permeabilidad magnética μ es una característica de los medios materiales que mide cómo responden a la presencia de un campo magnético. Si os fijáis, en las expresiones que hemos visto hasta ahora para campos magnéticos inducidos, que estaban estudiadas para el vacío, aparece la constante μ_0, que es la permeabilidad magnética del vacío. Para aplicar estas expresiones a un medio cualquiera, sólo habrá que sustituir la permeabilidad por el valor correspondiente al medio en cuestión (μ). Podéis ver que este concepto es análogo al de la permitividad eléctrica (ε) en el campo eléctrico.

El oersted (Oe)

Aunque la unidad del SI para la medida de $\vec{H}$ es el A/m, aún hoy día es habitual encontrar esta magnitud medida en una unidad del antiguo sistema CGS: el oersted (Oe). La equivalencia es:

$$1\ \text{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\ \text{A / m}$$

Igual que sucede con la permitividad eléctrica, lo más habitual es encontrar la permeabilidad magnética expresada en términos relativos, es decir, comparada con la permeabilidad del vacío, que es la que se toma siempre como referencia. Por ejemplo, podréis encontrar que os dicen que la permeabilidad del agua es 0,999992 veces la del vacío, o que la del acero lo es 700 veces. En este caso hablaremos de **permeabilidad relativa**.

Podéis ver la permitividad eléctrica (ε) en el subapartado 1.3.1 de este módulo

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad (84)$$

μ_r se lee "mu sub erre".

El valor de la permeabilidad magnética relativa quizá sea más intuitivo que el de la permeabilidad absoluta, ya que relaciona de manera directa el campo magnético externo ($\vec{B}_0$) con el campo "total" o "efectivo" ($\vec{B}$):

$$\vec{B} = \mu_r\vec{B}_0 \qquad (85)$$

Así, según el valor de μ_r tenemos:

- Un valor próximo a 1 ($\mu_r \approx 1$) indica un comportamiento cercano al del vacío ($\vec{B} \approx \vec{B}_0$).
- Un valor mayor que 1 ($\mu_r > 1$) indica que el material hace aumentar el campo magnético "efectivo" ($\vec{B} > \vec{B}_0$).
- Un valor más pequeño que 1 ($\mu_r < 1$) indica que el material tiende a magnetizarse en contra del campo magnético y, por tanto, el campo magnético "efectivo" es inferior al campo magnético externo ($\vec{B} < \vec{B}_0$).

Actualmente hay publicada una infinidad de listas, tablas y gráficas con las características magnéticas observadas de forma experimental para buena parte de los materiales conocidos y bajo multitud de condiciones diferentes (temperatura, presión, magnitud del campo magnético externo, etc). En la mayoría de los casos, los valores de μ_r están muy próximos a 1 y esto hace que, para un tema práctico, sea mucho más habitual encontrar indicados los valores de la susceptibilidad (χ) en lugar de la permeabilidad (μ o μ_r). Podéis encontrar una relación directa entre estos parámetros a partir de las expresiones (81) y (84).

Las relaciones directas entre la permeabilidad relativa (μ_r) y la susceptibilidad (χ) magnéticas de un material son:

$$\begin{aligned} \mu_r &= \chi + 1 \\ \chi &= \mu_r - 1 \end{aligned} \tag{86}$$

Los valores de la susceptibilidad y de la permeabilidad magnéticas varían mucho entre un medio y otro. Incluso dentro de un mismo medio pueden variar mucho en función de la intensidad del campo magnético externo. Por esta razón, el estudio del comportamiento magnético de los materiales es mucho más complejo y variado que el del comportamiento eléctrico.

A continuación introduciremos algunos de los tipos de materiales que podéis encontrar en función de su comportamiento en presencia de campos magnéticos. En particular, nos centraremos en tres tipos de materiales: materiales **diamagnéticos**, **paramagnéticos** y **ferromagnéticos**. Estos tres comportamientos no son los únicos pero sí los más habituales.

2.5.3. Materiales diamagnéticos

Como ya hemos dicho, los electrones de los átomos de un material en general se distribuyen por parejas, de manera que para cada electrón que gira en un sentido casi siempre existe otro que gira en sentido contrario. Esto significará que los campos magnéticos de cada pareja de electrones se compensan entre sí y si, además, todos los electrones de los átomos están emparejados, tendríamos que la magnetización resultante es cero.

Podéis ver la distribución en parejas de los electrones en el subapartado 2.5.1 de este módulo.

Nota

La explicación que tenéis aquí es una aproximación para ayudar a entender qué sucede.

Cuando un material se encuentra en una región donde existe un campo magnético $\vec{B}_0$, los pares de electrones de sus átomos (como cargas eléctricas en movimiento que son) se ven afectados y su movimiento se altera. Esta variación se produce de tal manera que provoca la aparición de un ligero movimiento dipolar magnético con **sentido opuesto** al campo magnético externo (figura 26a).

Figura 26

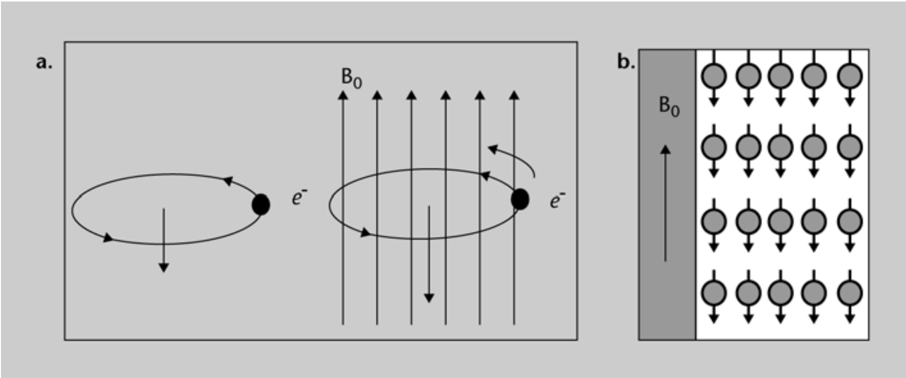


Figura 26

Representación esquemática del **diamagnetismo**:

a. Un campo magnético externo ($\vec{B}_0$) modifica el momento dipolar de un electrón. El aumento se produce en sentido opuesto a $\vec{B}_0$.

b. Los momentos dipolares magnéticos de los átomos se alinean en contra del campo magnético externo. La magnetización es negativa.

Esta modificación sucede, en mayor o menor medida, en todos los electrones de un átomo y en todos los átomos de un material. El resultado es que aparece una magnetización con sentido contrario al del campo magnético (figura 26b). Este comportamiento se denomina **diamagnetismo**.

El diamagnetismo es el comportamiento magnético más básico y se produce, en mayor o menor medida, en **todos los materiales**. Sin embargo, las magnitudes de estos campos que se crean pueden ser muy pequeñas (del orden del 0,001%) respecto al campo magnético externo al que se oponen y, como veremos más adelante, existen otros comportamientos magnéticos que son mucho más intensos y que, cuando se producen, "eclipsan" el diamagnetismo. Por tanto, denominamos materiales diamagnéticos a aquellos que presentan **principalmente** comportamiento diamagnético.

Los materiales diamagnéticos presentan siempre valores de la susceptibilidad magnética negativos ($\chi < 0$) porque ofrecen resistencia al campo magnético. Los valores típicos son del orden de $\chi \sim -10^{-5}$. Por tanto, la permeabilidad magnética de los materiales diamagnéticos siempre será $\mu_r < 1$, según la relación (86).

Presentan diamagnetismo todos los gases inertes, prácticamente todos los elementos no metálicos en su estado natural (la excepción más notable es el oxígeno, que no es diamagnético) y algunos metales, como el cobre, la plata o el oro. Otros ejemplos son el agua, el amoniaco, la sal, el grafito y la mayoría de los compuestos orgánicos.

Superdiamagnetismo

El mecanismo que explica el superdiamagnetismo en realidad tiene un origen muy diferente del diamagnetismo que hemos explicado. Se basa en un efecto denominado *efecto Meissner* y que está relacionado con la superconductividad.

Los materiales superconductores se pueden considerar diamagnéticos perfectos, ya que presentan una susceptibilidad $\chi \sim -1$. Esto significa que "expulsan" todo el campo magnético de su interior y esto les permite, entre otras cosas, levitar. Este comportamiento se denomina *superdiamagnetismo*.

2.5.4. Materiales paramagnéticos

Cuando hemos introducido la magnetización hemos explicado que, en general, los electrones se distribuyen por parejas. No obstante, a menudo nos encontramos con que existen electrones desemparejados, ya sea porque el número de electrones es impar, ya sea porque, pese ser número par, no se han distribuido de manera uniforme. Cuando esto sucede, el resultado es que los momentos dipolares magnéticos de los electrones de un átomo no se compensan del todo. Y la consecuencia de esta situación es que los átomos presentan un momento magnético permanente, como si fuesen imanes diminutos. En la figura 27 se muestran de forma esquemática los átomos de un material como pequeños imanes y cómo responden a la presencia de un campo magnético externo.

Figura 27

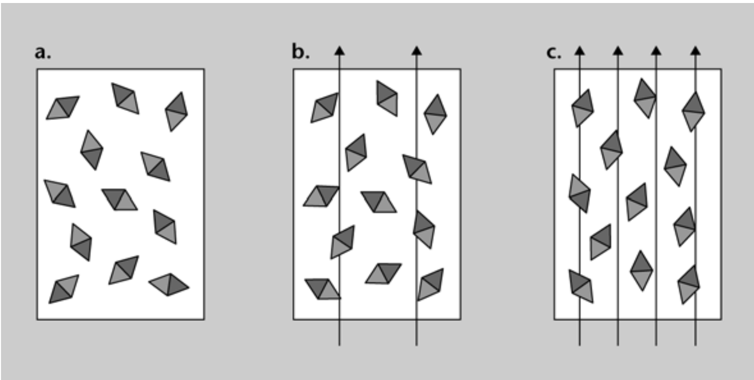


Figura 27

Representación esquemática de los efectos del **paramagnetismo**:

a. Sin campo magnético externo.

b. Con un campo magnético externo de poca intensidad.

c. Con un campo magnético externo de mucha intensidad.

- En la figura 27a se muestra cómo, de modo general y en ausencia de un campo magnético externo, los átomos de los materiales están orientados de manera aleatoria. Dado que el número de átomos es muy grande, por cada átomo que está orientado en una dirección y sentido concretos, seguro que encontraremos otro que está orientado en sentido contrario. El resultado es que la magnetización global es cero ($M = 0$).

- En la figura 27b se puede observar que, cuando el material se encuentra en una región donde sí que existe un campo magnético, los átomos se alinean en su dirección (como la aguja de una brújula que se alinea con el campo magnético de la Tierra). El resultado es una magnetización global en la misma dirección y sentido que el campo magnético externo.

- En la figura 27c se ve el mismo efecto pero con un campo magnético más intenso. Cuanto más grande es este, más átomos se añaden a la alineación y más crece la magnetización.

- Finalmente, si desaparece el campo magnético externo que había provocado esta alineación, la tendencia de los átomos es volverse a desordenar, y la magnetización global vuelve a ser cero. Esto se debe a la agitación térmica: a medida que aumenta la temperatura de un cuerpo, aumenta también la velocidad de sus partículas.

Paramagnetismo y diamagnetismo

Recordad que todos los materiales presentan diamagnetismo. Por tanto, podríamos decir que los materiales paramagnéticos son a la vez diamagnéticos y paramagnéticos. Lo que sucede es que el segundo comportamiento es, en general, mucho más intenso que el primero y por ello los efectos diamagnéticos se pueden negligir.

En resumen, la magnetización es directamente proporcional al campo magnético externo, y **en el mismo sentido**. Este fenómeno se denomina **paramagnetismo**, y los materiales que siguen principalmente este comportamiento se denominan **materiales paramagnéticos**.

Dado que, en los materiales paramagnéticos, los átomos tienden a orientarse en el mismo sentido que el campo magnético externo, presentarán siempre valores de la susceptibilidad magnética positivos ($\chi > 0$) y, según la relación (86), permeabilidades magnéticas mayores que 1 ($\mu_r > 1$). Los valores típicos son del orden de $\chi \sim 10^{-4}$.

Algunos ejemplos de materiales paramagnéticos son el oxígeno diatómico (O_2), la mayoría de los elementos metálicos, como el aluminio, el tungsteno, el platino, el calcio o el sodio, y buena parte de sus óxidos.

Podéis ver el diamagnetismo en el subapartado 2.5.3 de este módulo.

2.5.5. Materiales ferromagnéticos

El tercer grupo de materiales que trataremos son los materiales ferromagnéticos. Este grupo incluye los materiales que denominamos de modo común *materiales magnéticos* (aunque, en el fondo, todos son magnéticos). Seguro que todos habéis utilizado alguna vez imanes para sujetar objetos, o habéis observado que algunos destornilladores atraen los tornillos. Algunos incluso os habréis preguntado cómo funcionan las cintas magnéticas de almacenamiento de música o de datos, los altavoces de sonido o los transformadores de corriente, por ejemplo. Todos estos casos tiene un hecho en común: emplean **materiales ferromagnéticos**. Pero ¿a qué nos referimos y, sobre todo, cómo se comportan estos materiales?

Algunos materiales presentan, ante un campo magnético de poca intensidad, un comportamiento similar al paramagnetismo que hemos introducido en el apartado anterior. Es decir, sus átomos tienden a orientarse en el mismo sentido que el campo magnético. No obstante, cuando se aumenta la intensidad del campo, en lugar de crecer la magnetización de forma lineal o proporcional, lo hace de manera muy abrupta, incluso sin grandes magnitudes en el campo magnético externo.

Otra característica de este tipo de materiales es que su comportamiento magnético no es lineal y sus parámetros (susceptibilidad y permeabilidad magnéticas) no son constantes. Muy al contrario, su respuesta a un campo magnético externo variable depende de la velocidad en la que este se modifica e, incluso, depende del sentido en el que lo hace. En otras palabras, si aplicamos un campo magnético cuya intensidad sea primero creciente y después decreciente, observaremos que la magnetización en los caminos "de ida" y "de vuelta" es diferente. Se dice que el material presenta una **histéresis magnética**, y el ciclo que describe se denomina **ciclo de histéresis**.

En la figura 28 podéis visualizar un ejemplo de un ciclo de histéresis. En las gráficas podéis ver la variación de la magnetización $\vec{M}$ en función de la intensidad de campo magnético $\vec{H}$ (recordad que, según la ecuación (75), $\vec{H}$ es proporcional al campo magnético externo $\vec{B}_0$).

Recordad

La intensidad de campo magnético ($\vec{H}$) es proporcional al campo magnético externo ($\vec{B}_0$):

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

1) La primera etapa (figura 28a) corresponde a la respueta a un campo magnético externo cuya intensidad crece de modo gradual. Podéis observar que, después de una primera etapa de respuesta lineal, la magnetización comienza a crecer de forma espectacular. La explicación se encuentra en el hecho de que en los materiales ferromagnéticos los campos magnéticos de los átomos contenidos están muy unidos entre sí. Cuando uno de los átomos gira para reorientar su dipolo magnético hacia la dirección del campo, "arrastra" a los átomos de su alrededor, estos a sus vecinos y así sucesivamente. Se produce una especie de efecto "cascada".

Figura 28

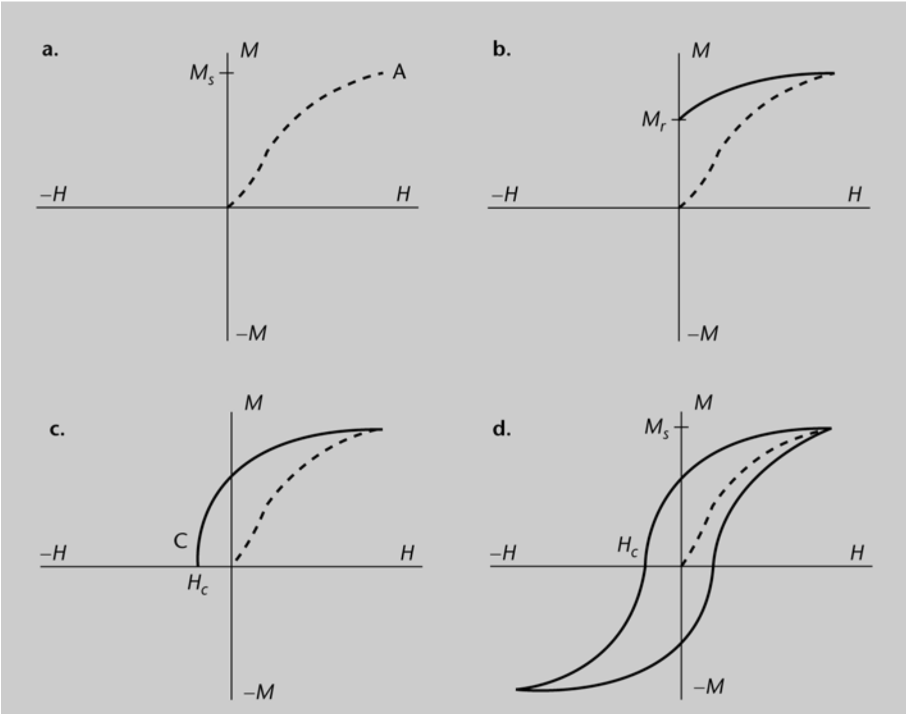


Figura 28

Representación esquemática de los efectos del **ferromagnetismo:**

a. Magnetización inicial y saturación (A).

b. Magnetización remanente (B).

c. Desmagnetización y campo coercitivo (C).

d. Ciclo completo.

Podéis hacer una analogía si os imagináis una grieta en un embalse. Al principio pasará poca agua, pero a medida que aumente su fuerza, la pared se irá resquebrejando más hasta que llegue un momento en el que hará un agujero y bajará mucha más cantidad de golpe.

Los valores de la permeabilidad magnética en esta etapa pueden llegar a valores del orden de millones de veces la del vacío. Algunos materiales magnéticos desarrollados por la industria, como el Permalloy, pueden llegar a tener valores máximos de permeabilidad del orden de 100.000 o incluso algunos millones de veces la del vacío.

Este crecimiento prácticamente "espontáneo" de la magnetización no dura de manera indefinida. Llegará un momento en el que todos los átomos ya se habrán orientado y, por tanto, la magnetización ya no podrá crecer más. Diremos que se ha llegado a la **magnetización de saturación**, $\vec{M}_S$, del material (el punto A de la figura 28a). Volviendo a la analogía del embalse, podríamos decir que "ya no queda más agua que pasar por el agujero".

2) Pero entonces se entra en la segunda etapa (figura 28b), cuando se produce un fenómeno curioso, que es el que provoca que los materiales ferromagnéticos sean tan interesantes. ¿Qué sucede si volvemos a disminuir el campo magnético que habíamos aumentado y que había provocado la magnetización del material?

Si recordáis, en un material paramagnético, el comportamiento era proporcional y la magnetización volvía a su valor cero inicial por el mismo camino que había recorrido al aumentar, ya que al eliminar la causa de la reordenación su tendencia es volver a desordenarse.

En un material ferromagnético esto no sucede, y la magnetización disminuye de manera mucho más lenta de como había aumentado. El resultado es que, una vez desaparecida su causa, continúa habiendo una **magnetización remanente,** $\vec{M}_r$, (el punto B de la figura 28b). El motivo es el mismo que provoca el efecto "cascada" inicial: los átomos están fuertemente ligados entre sí y, por tanto, es mucho más dificil que vuelvan a su estado inicial. Volviendo a la analogía del agua, es relativamente fácil redirigir el rumbo de una gota pero mucho más difícil hacerlo para una corriente grande.

La magnetización remanente es la propiedad clave en los materiales ferromagnéticos. El hecho de mantener una magnetización una vez desaparece el campo magnético que la ha creado provoca que estos materiales sean tan útiles para las aplicaciones que hemos mencionado al principio del apartado (imanes, transformadores, cintas magnéticas, etc.).

3) Para eliminar completamente la magnetización de un material ferromagnético (figura 28c), hay que aplicarle otro campo magnético externo ($\vec{H}_C$) en sentido contrario al inicial, hasta llegar a un valor denominado **coercitividad** o **campo coercitivo** (en la figura, el punto C).

4) El ciclo se completa con el mismo comportamiento que hemos visto en las dos primeras etapas pero ahora en sentido opuesto (figura 28d).

Solo hay tres elementos puros, que se puedan encontrar de forma natural, que presenten comportamiento ferromagnético. Son el hierro (Fe), el cobalto (Co) y el níquel (Ni). No obstante, estos no son los únicos materiales ferromagnéticos, ya que la mayoría de las aleaciones que contienen una proporción considerable de estos elementos también lo son (por ejemplo, la mayoría de los aceros). De hecho, en la actualidad, el desarrollo de nuevos materiales ferromagnéticos sintetizados está muy avanzado y existen materiales como el permalloy o el supermalloy que superan con creces las propiedades ferromagnéticas de los materiales "naturales". Incluso se han llegado a desarrollar aleaciones de carácter ferromagnético en las que ninguno de los elementos que las forman lo son de forma individual.

Elementos ferromagnéticos

El **hierro** (Fe), el **cobalto** (Co) y el **níquel** (Ni) son la base de los materiales ferromagnéticos, ya que son los únicos elementos de la tabla periódica que se pueden encontrar en estado natural que presenten ferromagnetismo. Hay otros elementos de la tabla que también presentan este comportamiento, pero son elementos extraños que no se pueden encontrar de manera natural.

2.5.6. Comportamiento magnético de los materiales en general

A continuación os mostramos en una tabla resumen, de manera esquemática, las características magnéticas de los tres tipos de materiales que hemos introducido (diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos).

Tabla 1

	Susceptibilidad magnética (χ)	Permeabilidad magnética (μ)	Permeabilidad relativa (μ_r)
Materiales diamagnéticos (se oponen al campo magnético de forma ligera)	$\chi < 0$	$\mu < \mu_0$	μ_r
Materiales paramagnéticos (se alinean con el campo magnético de forma ligera)	$\chi > 0$	$\mu > \mu_0$	$\mu_r > 1$
Materiales ferromagnéticos (se alinean con el campo magnético de forma rápida y espontánea)	$\chi >> 0$ (no constante)	$\mu >> \mu_0$ (no constante)	$\mu_r >> 1$ (no constante)

Como podéis ver, los materiales diamagnéticos presentan una susceptibilidad magnética negativa (o, lo que es lo mismo, una permeabilidad magnética más pequeña que la del vacío), ya que su respuesta respecto a un campo magnético externo es crear una magnetización en dirección opuesta. El resultado es que el campo magnético total es ligeramente inferior al que tendríamos sin la presencia del material. Los superconductores se pueden considerar diamagnéticos perfectos, ya que presentan una susceptibilidad prácticamente igual a menos 1 ($\chi \approx -1$).

Por el contrario, los materiales paramagnéticos presentan una susceptibilidad magnética positiva (y, por tanto, una permeabilidad mayor que la del vacío), ya que cuando se encuentran en una región donde existe un campo magnético estos se alinean y el resultado es que el campo magnético total es ligeramente superior.

Los materiales ferromagnéticos presentan susceptibilidades magnéticas positivas y muy altas, ya que su magnetización es rápida y casi espontánea. Además, tal como hemos visto, la respuesta magnética de estos materiales no es lineal, sino que sigue un ciclo de histéresis.

Los imanes permanentes que podéis encontrar de modo habitual en muchas aplicaciones de la vida cotidiana están hechos con materiales ferromagnéticos. El uso de estos dispositivos se basa en su capacidad de almacenamiento de energía magnética sin necesidad de un campo magnético externo, y esto se puede conseguir gracias a las propiedades magnéticas de los materiales ferromagnéticos.

Los tres tipos de comportamiento magnético que hemos visto, diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo, son los más habituales pero no son los únicos. Existen otros tipos de comportamientos magnéticos que o bien no los podemos incluir en los grupos anteriores, o bien simplemente merecen una consideración especial. Es el caso del **ferrimagnetismo**, el **antiferromagnetismo**, el **superdiamagnetismo** (que ya hemos comentado), el **superpara-**

magnetismo, el **superferromagnetismo**, el **metamagnetismo** o el que encontramos en los denominados *vidrios de spin*. Dada su complejidad y exclusividad para ciertas aplicaciones, su estudio no entra dentro del objetivo de este módulo y no los explicaremos.

2.6. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos hecho un repaso de los conceptos clave de la magnetostática y la inducción magnética. Hemos intentado seguir un cierto paralelismo con el apartado anterior.

En primer lugar hemos introducido las corrientes eléctricas como generadoras de campo magnético. Después hemos vuelto a estudiar las líneas de campo y el flujo de campo, pero ahora referidas al campo magnético, y le hemos aplicado la ley de Gauss, con un resultado interesante: las líneas de campo no tienen ni origen ni final, es decir, no hay "cargas magnéticas".

Con el concepto de flujo de campo magnético hemos introducido también una nueva herramienta matemática relacionada con el operador nabla: la divergencia. Hemos visto que una divergencia diferente de cero, como en el caso del campo eléctrico, indica que existen puntos donde comienzan o acaban las líneas del campo, mientras que una divergencia igual a cero, como en el caso del campo magnético, indica que no existen estos puntos.

Más adelante hemos enunciado la primera de las leyes que relacionan los campos eléctrico y magnético: la ley de Ampère-Maxwell. Esta ley explica el origen de los campos magnéticos y es la primera prueba de que los campos eléctrico y magnético corresponden a una misma interacción: la fuerza electromagnética.

Siguiendo con el paralelismo respecto a los apartados anteriores, hemos introducido el potencial vectorial magnético. Sin embargo, la diferencia es que este potencial es una magnitud vectorial y su relación con el campo magnético no se efectúa mediante el gradiente sino con una tercera herramienta matemática también relacionada con el operador nabla: el rotacional. El rotacional de un campo expresa su tendencia a presentar componentes tangenciales.

Más adelante hemos introducido la segunda ley que relaciona los campos eléctrico y magnético: la ley de inducción de Faraday, aunque ahora se muestra la relación inversa a la ley de Ampère-Maxwell, es decir, la creación de campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables.

Para acabar, hemos concluido el apartado detallando el comportamiento de los campos magnéticos en presencia de medios materiales y hemos introducido el concepto de permeabilidad magnética del material como una medida del comportamiento magnético de los materiales.

3. Leyes de Maxwell

Hasta ahora hemo visto las propiedades de la electrostática y la magnetostática y hemos presentado algunas leyes que las rigen. Vale la pena hacer un repaso de estas leyes.

1) Ley de Gauss para la electricidad:

Podéis ver la ley de Gauss para la electricidad en el subapartado 1.1.3 de este módulo.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{87}$$

Explica que el balance de flujo eléctrico total que atraviesa una superficie cerrada sólo puede deberse a la carga contenida en su interior, y también relaciona esta carga con el campo eléctrico a su alrededor.

2) Ley de Gauss para el magnetismo:

Podéis ver la ley de Gauss para el magnetismo en el subapartado 2.2.3 de este módulo.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{88}$$

Explica que el balance de flujo magnético total que atraviesa una superficie cerrada debe ser cero.

3) Ley de inducción de Faraday-Lenz:

Podéis ver la ley de inducción de Faraday-Lenz en el subapartado 2.4 de este módulo.

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{89}$$

Explica cómo un campo magnético variable puede generar un potencial eléctrico y, por tanto, un campo eléctrico.

4) Ley de Ampère-Maxwell:

Podéis ver la ley de Ampère-Maxwell en el subapartado 2.2.5 de este módulo.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \tag{90}$$

Relaciona el campo magnético con las causas que lo generan.

Estas leyes explican fenómenos específicos observados en el ámbito del electromagnetismo y sus descubrimientos pueden ser considerados hitos importantes en la evolución de su conocimiento.

Probablemente, el paso más importante y quizá definitivo en este sentido se produjo en 1864 cuando Maxwell (el mismo que hemos citado cuando hemos presentado la ley de Ampère-Maxwell) presentó una teoría conjunta del electromagnetismo donde, entre otras cosas, resumió (y en algún caso amplió) el conocimiento adquirido hasta aquel momento con una serie de ecuaciones. La aportación de Maxwell se puede considerar un hito histórico de la misma relevancia que las leyes de la mecánica de Newton, los principios de la mecánica cuántica o las teorías de la relatividad de Einstein. Para que os hagáis una idea de su importancia, podéis considerar que sin ellas la titulación para la que estáis estudiando sencillamente no existiría, ya que la tecnología a la que se aplica no se habría ni desarrollado.

En los apartados siguientes presentaremos una a una estas ecuaciones y qué relación tienen con las leyes presentadas anteriormente.

3.1. La primera ley de Maxwell y la ley de Gauss para el campo eléctrico

La primera ecuación o ley de Maxwell no es más que una reformulación de la ley de Gauss aplicada al campo eléctrico, que ya vimos. Recordemos la formulación:

Podéis ver la ley de Gauss para la electricidad en el subapartado 1.1.3 de este módulo.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{91}$$

La expresión anterior explicaba que el flujo de campo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada es igual al valor de la carga neta que hay en el interior de la superficie (Q_{int}) dividida por la permitividad del vacío (ε_0). En otras palabras, dado que las líneas de campo solo pueden comenzar o acabar en una carga eléctrica, el balance neto entre las líneas que "salen" y las que "entran" en la superficie cerrada solo puede ser debido a la presencia de carga neta en su interior. Si esta carga es cero, el número de líneas de campo que atraviesan el área en un sentido debe ser el mismo que en el otro.

Recordad que introdujimos el concepto de divergencia de un campo vectorial como una expresión matemática del número de líneas de campo que nacen o mueren en una región determinada. Por tanto, fuimos capaces de deducir que existe una relación entre esta herramienta matemática y el flujo de un campo. Esta relación está explicada mediante un teorema matemático que desarrolló el propio Gauss: el teorema de la divergencia, también denominado *teorema de Gauss* en su honor.

Divergencia de un vector

Podéis consultar en el subapartado 2.2.4 de este módulo que la divergencia de un vector $\vec{A}$ es el producto escalar del operador nabla $\vec{\nabla}$ y $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

El resultado es un número real, no un vector.

El teorema de la divergencia o de Gauss enuncia que el flujo a través de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia en todo el volumen determinado por la superficie. Se expresa así:

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{92}$$

Si aplicamos la ley de Gauss para el campo electrostático (91) en la parte derecha de la ecuación (92), obtenemos la expresión siguiente:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV \qquad (93)$$

donde hemos tenido en cuenta que $Q = \int_V \rho dV$, donde ρ es la densidad de carga volúmica.

Recordad

La derivada de la integral de una función escalar es la propia función, aunque se trate de derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x,y)dx\right) = f(x,y)$$

Podemos eliminar la integral si derivamos respecto al volumen ambos lados:

$$\frac{d}{dV}\left(\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)dV\right) = \frac{d}{dV}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV\right) \qquad (94)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (94b)$$

Como podéis comprobar, la expresión (94b) relaciona la divergencia del campo eléctrico en un punto con la densidad de carga (ρ) en aquel punto y la permitividad del medio, que en este caso sería la del vacío (ε_0).

La **primera ley de Maxwell** establece que la divergencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto cualquiera debe ser igual a la densidad de carga en aquel punto dividida por la permitividad del medio material. En el caso del vacío es:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (95)$$

donde ρ es la densidad de carga y ε_0 es la permitividad del vacío.

El sentido físico de la primera ley de Maxwell es que sitúa el origen de las líneas de campo y también las cuantifica. Si os acordáis, cuando introdujimos la divergencia de un vector o de un campo vectorial, vimos que esta era una medida de las líneas de campo que nacían o morían en un punto. Por tanto, con esta ley se relaciona el origen de las líneas de campo con su causa (la densidad de carga).

Podéis ver la divergencia de un vector en el subapartado 2.2.4 de este móduol.

En este apartado hemos partido de la ley de Gauss para el campo eléctrico y la hemos convertido en la primera ley de Maxwell. Podemos proceder de la misma manera con la ley de Gauss para el campo magnético y obtener así la segunda ley de Maxwell.

3.2. La segunda ley de Maxwell y la ley de Gauss para el magnetismo

Podemos obtener la segunda ley o ecuación de Maxwell a partir de la ley de Gauss para el campo magnético. Recordemos la formulación:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (96)$$

La ley de Gauss para el magnetismo enuncia que el balance de flujo de campo magnético que atraviesa cualquier superficie cerrada debe ser siempre cero. En otras palabras, que no existen "cargas magnéticas" donde puedan comenzar o acabar las líneas de campo y, por tanto, que el número de líneas que "entran" dentro la superficie debe ser el mismo que las que "salen".

Procederemos de manera análoga a como hemos hecho en la primera ley y aplicaremos el teorema de la divergencia (ecuación 92) al campo magnético:

Podéis ver la divergencia de un vector en el subapartado 2.2.4 de este módulo.
Podéis ver su aplicación al campo eléctrico en el subapartado 3.1 de este módulo.

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)dV = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \tag{97}$$

Divergencia de un vector

La divergencia de un vector $\vec{A}$ es el producto escalar del operador nabla $\vec{\nabla}$ y $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

El resultado es un número real, no un vector.

Según la ley de Gauss para el campo magnético, ecuación (96), el flujo de campo magnético total para una superficie cerrada ha de ser cero. Por tanto, el segundo término de la ecuación debe ser cero.

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)dV = 0 \tag{98}$$

Y, como antes, podemos eliminar la integral si derivamos respecto al volumen en ambos lados:

Recordad

La derivada de la integral de una función escalar es la propia función, aunque se trate de derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x,y)dx\right) = f(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)dV\right) = \frac{\partial}{\partial V}(0)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{99}$$

Como podéis comprobar, la expresión (99) dice que la divergencia de un campo magnético es siempre cero. Si os acordáis, ya introdujimos la divergencia de un campo vectorial como una medida de las líneas de campo que nacen o mueren en un punto. Aplicado al campo magnético, tendremos que, dado que no existen las "cargas magnéticas", las líneas de campo magnético no pueden comenzar ni acabar en ningún punto determinado y, por tanto, la divergencia de un campo magnético debe ser cero.

Podéis ver la divergencia de un campo vectorial en el subapartado 2.2.4 de este módulo.

La **segunda ley de Maxwell** dice que la divergencia de un campo magnético $\vec{B}$ debe ser cero en cualquier punto:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{100}$$

Como ya habéis visto, las dos primeras leyes de Maxwell son paralelas y expresan cómo son la divergencia de los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Su significado físico es el siguiente: las líneas de campo sólo pueden nacer o morir allí donde hay cargas y su número es proporcional al valor de estas cargas. Para el caso del campo magnético, dado que no existen "cargas magnéticas", ello implica que las líneas de campo no pueden comenzar ni acabar en ningún lugar y, por tanto, se tratará de líneas cerradas.

Estas dos leyes explican las características de los campos eléctrico y magnético de forma individual pero no son suficientes para explicar todo el electromagnetismo como una única interacción, ya que no explican la relación entre los dos campos. Para hacerlo, es necesario volver a analizar con detalle dos leyes más que ya hemos visto y que introducen esta relación: la ley de inducción de Faraday, que explica la generación de campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables, y la ley de Ampère-Maxwell, que explica el caso contrario: la generación de campos magnéticos a partir de campos eléctricos variables.

3.3. La tercera ley de Maxwell y la ley de inducción de Faraday

La tercera ley, que veremos a continuación, es la primera que muestra la interrelación entre los campos eléctrico y magnético, ya que no es más que la ley de inducción de Faraday que ya hemos visto. Recordad su formulación:

Podéis ver la ley de inducción de Faraday en el subapartado 2.4 de este módulo.

$$fem_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{101}$$

Esta expresión indica que la fuerza electromotriz inducida (fem_{ind}) generada en un circuito cerrado es igual al ritmo de variación con el tiempo del flujo de campo magnético (Φ_B) que atraviesa la superficie dibujada por el circuito.

La fem_{ind} generada en un circuito cerrado C cualquiera corresponde a la diferencia de potencial (ΔV) que aparece al desplazarse a lo largo de todo el recorrido del circuito. También explicamos que la diferencia de potencial entre dos puntos es la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de un recorrido que une los dos puntos (ecuación (20)). Si el circuito es cerrado, la integral de línea se convierte en una circulación del campo. Por tanto, tendremos que:

Podéis ver la diferencia de potencial entre dos puntos en el subapartado 1.2 de este módulo.

$$\Delta V = -\int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{102}$$

Y si combináis las expresiones (101) y (102) tenemos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{103}$$

Igual que con las leyes primera y segunda, Maxwell reformuló también esta tercera ley de manera similar, pero esta vez utilizó otro teorema matemático: el teorema de Kelvin-Stokes. Para entenderlo mejor, observad antes la figura 29. En

Circulación de un campo

La circulación de un campo vectorial $\vec{u}$ alrededor de un recorrido cerrado C cualquiera se define como la integral de línea del campo a lo largo de todo el recorrido:

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Conceptualmente, se puede entender como la suma de las componentes tangenciales del campo en todos los tramos infinitesimales por donde pasa.

ella podéis distinguir una zona coloreada que corresponde a una superficie $\vec{S}$ cerrada por la parte superior y abierta por la parte inferior (podéis imaginarla como un bol de cocina boca abajo). Los límites de la apertura de la parte inferior están marcados por un recorrido cerrado C, indicado por las flechas.

Figura 29

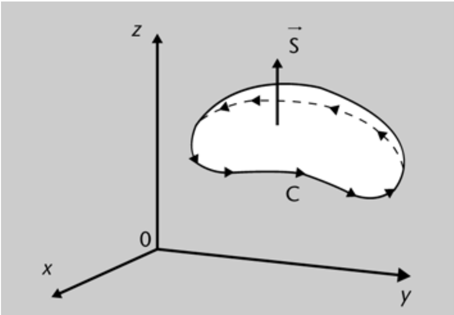


Figura 29

Representación gráfica del teorema de Kelvin-Stokes.

El teorema de Kelvin-Stokes enuncia que la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial a lo largo de una superficie S no cerrada es igual a la circulación del mismo campo a lo largo del recorrido cerrado C que delimita esta superficie. Este enunciado se formula, en términos matemáticos, así:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{104}$$

Si combináis las expresiones (103) y (104), obtendréis que la integral de superficie del rotacional del campo eléctrico a lo largo del circuito cerrado C corresponde a la variación del flujo magnético a través de la superficie que delimita:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{105}$$

Si derivéis ambos lados respecto a la superficie S obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right) \tag{106}$$

Si sustituís el flujo magnético Φ_B por su definición (52), es decir, por la integral de superficie del campo magnético, obtendréis finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) \tag{107}$$

Recordad

En una derivada segunda respecto a dos variables diferentes, el orden de derivación no altera el resultado:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$$

En el segundo término de la ecuación, podemos cambiar el orden de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial S}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) \tag{108}$$

Podéis eliminar las integrales, ya que las derivadas se realizan respecto a la misma variable (S). Por tanto, tendremos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{109}$$

donde observad que la derivada total respecto al tiempo se ha transformado en derivada parcial. No os preocupéis de cómo ni por qué se ha producio este cambio. Quedaos solo con el hecho de que en la forma integral tenéis una derivada total respecto al tiempo y aquí, en la forma diferencial (109), una derivada parcial.

Recordad que...

La derivada parcial de la integral de una función vectorial es la propia función, siempre y cuando ambas operaciones se hagan respecto a la misma variable:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\vec{u}(x,y)dx\right) = \vec{u}(x,y)$$

La **tercera ley de Maxwell** dice que el rotacional del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto cualquiera es igual al ritmo de variación (la derivada respecto al tiempo) del campo magnético $\vec{B}$ en aquel mismo punto, cambiado de signo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{110}$$

Rotacional

El rotacional de un campo vectorial $\vec{u}$ se define como el producto vectorial del operador nabla $\vec{\nabla}$ por $\vec{u}$. Por las propiedades del producto vectorial, el rotacional será siempre un nuevo vector **perpendicular** a $\vec{u}$.

Se puede calcular de la manera siguiente:

$$\text{rot }\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{u} =$$

$$= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Así, la tercera ley de Maxwell muestra, a diferencia de las dos primeras, una primera relación entre el campo eléctrico y el campo magnético. En este caso, se explica cómo un campo magnético variable crea o modifica el campo eléctrico.

A continuación deduciremos la cuarta y última ley de Maxwell, que trata del último caso que nos queda por estudiar: la generación o modificación de campos magnéticos a partir de campos eléctricos variables. Lo haremos a partir de la ley de Ampère.

3.4. La cuarta ley de Maxwell y la ley de Ampère-Maxwell

Si volveis atrás, recordaréis que introdujimos el magnetismo explicando el campo magnético inducido primero por una carga en movimiento y después por una corriente eléctrica. Más tarde introdujimos la ley de Ampère-Maxwell, que generalizaba los casos anteriores:

Podéis ver el magnetismo en el apartado 2 de este módulo.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right) \tag{111}$$

La ley de Ampère-Maxwell establece que la integral de línea de un campo magnético alrededor de un circuito cerrado es proporcional a la corriente que atraviesa la superficie imaginaria dibujada por este circuito. Es decir, relaciona el campo magnético en una región con su causa, las corrientes eléctricas (cargas en movimiento).

De la misma manera que con la tercera ecuación, Maxwell utiliza también el teorema de Kelvin-Stokes (ecuación (104)) pero ahora aplicado al campo magnético:

$$\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)d\vec{S} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \tag{112}$$

Podéis proceder de manera análoga al caso de la tercera ley de Maxwell y combinar las expresiones (111) y (112):

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) d\vec{S} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \tag{113}$$

Con la ecuación (46) podemos poner la intensidad *I*, en función de $\vec{J}$; y con la ecuación (59), en función del campo. Así queda:

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) d\vec{S} = \mu_0 \left(\int_S \vec{J} d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \right) \tag{114}$$

Y si derivamos respecto a *S* tenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{115}$$

donde podéis notar también que la derivada total respecto al tiempo se ha convertido en derivada parcial.

Fijaos en que el cálculo lo hemos hecho para el vacío (ε_0 y μ_0).

La **cuarta ecuación de Maxwell** relaciona el **rotacional** del **campo magnético** $\vec{B}$ con la densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ y con la variación del campo eléctrico $\vec{E}$ mediante la condición siguiente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{116}$$

donde μ_0 y ε_0 son, respectivamente, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio material.

Rotacional

El rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$ se define como el producto vectorial del operador nabla $\vec{\nabla}$ por $\vec{A}$. Por las propiedades del producto vectorial, el rotacional será siempre un nuevo vector perpendicular a $\vec{A}$.

Se puede calcular de la manera siguiente:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La cuarta ley de Maxwell explica la última pieza que nos quedaba para acabar de cuadrarlo todo: el origen de los campos magnéticos. Recordad que la otra ley relacionada con el campo magnético, la segunda ley de Maxwell, no explicaba la generación de campos magnéticos, sino que sólo indicaba la inexistencia de "cargas magnéticas". En esta cuarta ley se explican a la vez las dos fuentes posibles de creación de campo magnético: las corrientes eléctricas (indicadas por $\vec{J}$) y los campos eléctricos variables (indicados por $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$).

Así, ya hemos introducido una a una las ecuaciones de Maxwell y hemos explicado de dónde provenían. A continuación las analizaremos de manera global y después estudiaremos algunos casos específicos interesantes.

3.5. Visión global y estudio de casos específicos

En la tabla siguiente se muestran las cuatro leyes de Maxwell en su forma diferencial y sus equivalencias en forma integral, que corresponden a cuatro leyes que ya habéis visto al tratar la electrostática y la magnetostática.

Podéis ver la electrostática y la magnetostática en los apartados 1 y 2 de este módulo.

Tabla 2. Leyes de Maxwell para el electromagnetismo

Forma diferencial		Forma integral	
1.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (117)	**Ley de Gauss para el campo eléctrico**	$\oint_S \vec{E}d\vec{S}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (121)
2.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (118)	**Ley de Gauss para el campo magnético**	$\oint_S \vec{B}d\vec{S}=0$ (122)
3.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (119)	**Ley de inducción de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ (123)
4.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (120)	**Ley de Ampère-Maxwell**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$ (124)

Las leyes de Maxwell que acabamos de introducir y que podéis ver en la tabla representan la base del electromagnetismo, ya que explican la naturaleza de los campos eléctrico y magnético y de su interrelación. Para completar el conocimiento de la electrodinámica, solo hay que añadir:

- **La ecuación de continuidad**, que ya la habéis visto en la ecuación 51. Esta ecuación, siguiendo los pasos que hemos seguido para las leyes de Maxwell, se puede escribir de forma diferencial como:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{125}$$

Podéis ver la ecuación de continuidad en el subapartado 2.1.3 de este módulo.

- La expresión de la fuerza electromagnética, es decir, la fuerza que experimentaría una carga que se encontrara en una región en la que hay un campo eléctrico y un campo magnético de manera simultánea. Esta fuerza se denomina **fuerza de Lorentz** y corresponde a la suma algebraica de las fuerzas eléctrica (16) y magnética (61):

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{126}$$

Para una distribución de cargas y de corriente cualquier fuerza electromagética se puede escribir como:

$$\vec{F}=\int_V\left(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}\right)dV \tag{127}$$

Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz es la combinación de las fuerzs eléctrica y magnética:

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Sin embargo, también es habitual referirse con este nombre a la fuerza magnética por separado:

$$\vec{F}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Una vez que conocéis todas las ecuaciones que determinan el electromagnetismo, vale la pena que os fijéis en un detalle: las ecuaciones que os hemos mostrado hasta ahora están deducidas para el vacío. Este hecho es relevante, ya que implica que los campos eléctrico y magnético existen en el vacío, no necesitan materia. Pero ¿cómo se modificarían las leyes en presencia de un medio material? Lo veremos a continuación.

3.5.1. Estudio de las leyes de Maxwell en presencia de medios materiales

Como ya vimos, el estudio de los campos eléctrico y magnético en presencia de medios materiales puede ser bastante complejo. Sin embargo, podemos limitar el estudio a los casos "ideales" en los que los medios son isótropos, homogéneos y lineales (i. h. l.), ya que el estudio para medios que no son i. h. l. es mucho más complejo y queda fuera de los objetivos de este módulo.

Podéis ver la electrostática y el magnetismo en presencia de medios materiales y la definición de los materiales i. h. l. en los subapartados 1.3 y 2.5 de este módulo.

La definición de los materiales i. h. l. y la simplificación que implican ya los vimos. Se pueden resumir en que la presencia de un medio de este tipo se traduce en la sustitución de la permitividad eléctrica y de la permeabilidad magnética del vacío por los valores correspondientes al medio en cuestión:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\to \varepsilon \\ \mu_0 &\to \mu \end{aligned} \qquad (128)$$

Si realizáis estas sustituciones, las leyes de Maxwell quedan como en la tabla 3.

Tabla 3

Forma diferencial		Forma integral	
1.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (129)	**Ley de Gauss para el campo eléctrico**	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$ (133)
2.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (130)	**Ley de Gauss para el campo magnético**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ (134)
3.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (131)	**Ley de inducción de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (135)
4.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ (132)	**Ley de Ampère modificada**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\left(I + \varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}\right)$ (136)

Es muy habitual encontrarse las ecuaciones de la tabla 3 reescritas con la inclusión de los conceptos de desplazamiento eléctrico ($\vec{D}$) (podéis ver la ecuación (35)) y de intensidad de campo magnético ($\vec{H}$) (podéis ver la ecuación (83)) que introdujimos al tratar la electrostática y la magnetostática en presencia de medios materiales. Por este motivo, en la tabla 4 os mostramos, a modo informativo, cómo quedan las ecuaciones con este cambio, aunque en este módulo preferimos utilizar las expresiones de la tabla 3.

Podéis ver la electrostática, el magnetismo en presencia de medios materiales, en los subapartados 1.3 y 2.5 de este módulo.

Tabla 4

Forma diferencial		Forma integral	
1.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ (137)	**Ley de Gauss para el campo eléctrico**	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_{int}$ (141)
2.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (138)	**Ley de Gauss para el campo magnético**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ (142)
3.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (139)	**Ley de inducción de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ (143)
4.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (140)	**Ley de Ampère modificada**	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S J d\vec{S}+\varepsilon\frac{d\Phi_D}{dt}$ (144)

Una vez que tenemos las expresiones generales de las cuatro leyes de Maxwell tanto en el vacío como en medios materiales, estudiaremos dos casos específicos que son de especial interés:

- Situaciones en las que tanto el campo eléctrico como el campo magnético son estacionarios, es decir, no varían en el tiempo
- Situaciones en las que los campos son variables pero no hay presencia de ninguna carga eléctrica ni corriente eléctrica

3.5.2. Estudio del caso específico en el que los campos son estacionarios

En este punto analizaremos las leyes de Maxwell en situaciones en las que tanto el campo eléctrico como el campo magnético no varían con el tiempo (electrostática y magnetostática, respectivamente). Ver esta situación os será útil e interesante por tres motivos:

- las ecuaciones se simplifican de modo considerable,
- os permite ver el paralelismo entre los campos eléctrico y magnético,
- se trata de un caso que podéis encontrar a menudo en el mundo real.

Para determinar cómo son las leyes de Maxwell en estas condiciones, hay que modificarlas y hacer desaparecer todos los términos dependientes del tiempo. Es decir, debéis hacer:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0; \qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

y

$$\frac{d\vec{E}}{dt}=0; \qquad \frac{d\vec{B}}{dt}=0 \qquad (145)$$

Así, las ecuaciones de Maxwell para situaciones en las que tanto el campo eléctrico como el campo magnético no varían en el tiempo quedan como en la tabla 5

Tabla 5. Leyes de Maxwell en condiciones estacionarias

Forma diferencial			**Forma integral**		
1.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$	(146)	**Ley de Gauss para el campo elèctric**	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon}$	(150)
2.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$	(147)	**Ley de Gauss para el campo magnético**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	(151)
3.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$	(148)	**Ley de inducció de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	(152)
4.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\vec{J}$	(149)	**Ley de Ampère modificada**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu I$	(153)

La primera conclusión que podemos extraer es la complementariedad de ambos campos. Es como si fuesen dos caras de una moneda.

En primer lugar, observad el campo eléctrico. Su rotacional ($\vec{\nabla}\times\vec{E}$) es, en ausencia de campos magnéticos variables, y según la 3.ª ecuación de Maxwell, siempre cero. Este hecho indica que el trabajo realizado por una carga en un circuito cerrado es cero (ya que en el caso que estamos considerando no hay ningún campo magnético variable que haga aparecer una fem inducida). En otras palabras, se trata de un campo conservativo.

Por otro lado, su divergencia ($\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$) es proporcional a la densidad de carga eléctrica y también presenta una dependencia con la permitividad del medio (ε). Si observáis el equivalente en forma integral (la ley de Gauss para el campo eléctrico), veréis que este hecho indica que el flujo que atraviesa cualquier superficie cerrada solo puede ser provocado por las cargas que se encuentran en su interior.

En cambio, en el campo magnético la situación es justo al revés. Es la divergencia ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$) la que es, en ausencia de campos eléctricos variables, siempre cero. Este hecho indica que no existen "cargas magnéticas". En cambio, el rotacional del campo magnético ($\vec{\nabla}\times\vec{B}$) no es cero, y este hecho indica que se trata de un campo no conservativo, al contrario que el campo electrostático.

Si hacemos una comparativa entre los campos eléctrico y magnético, comprobaréis que el módulo del rotacional del campo magnético presenta más analogías con el de la divergencia del campo eléctrico que con el de su rotacional. Por un lado, su módulo es proporcional a la densidad de corriente eléctrica (recordad que la corriente tiene en el campo magnético el mismo papel, conceptualmente, que la carga en el campo eléctrico). Por otro lado, el rotacional también incluye una dependencia respecto a la permeabilidad del medio (recordad que la permeabilidad es análoga a la permitividad eléctrica pero para el campo magnético).

Una vez vistas cómo quedan las ecuaciones en condiciones estacionarias, pasaremos a estudiar precisamente el caso contrario: las leyes de Maxwell en condiciones no estacionarias. Esto nos permitirá ver que un campo eléctrico genera un campo magnético y este último vuelve a crear un campo eléctrico.

3.5.3. Estudio de las ecuaciones de Maxwell en condiciones no estacionarias y en ausencia de cargas y corrientes eléctricas

En este punto estudiaremos el caso siguiente:

- tanto el campo eléctrico como el campo magnético son variables,
- no hay presencia de cargas ni corrientes eléctricas:

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \vec{J} &= 0 \end{aligned} \qquad (154)$$

Esta situación es interesante porque tratamos la interacción entre los campos eléctrico y magnético sin preocuparnos de qué los ha creado (las cargas y las corrientes). Este caso es el que utilizaremos más adelante para deducir la existencia de las ondas electromagnéticas.

En estas condiciones, las leyes de Maxwell pasan a ser como se indica en la tabla 6.

Tabla 6. Leyes de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes eléctricas

Forma diferencial			Forma integral		
1.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$	(155)	**Ley de Gauss para el campo eléctrico**	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$	(159)
2.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$	(156)	**Ley de Gauss para el campo magnético**	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	(160)
3.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(157)	**Ley de inducción de Faraday**	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$	(161)
4.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	(158)	**Ley de Ampère modificada**	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu\varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}$	(162)

Como podéis ver, este caso es muy interesante, ya que nos permite observar otro paralelismo entre los campos eléctrico y magnético. Si en el caso estacionario habíamos observado que ambos campos se comportaban de forma complementaria, ahora sucede al contrario: ambos parecen responder de la misma manera.

Y es que, en efecto, en ausencia de las “causas” de los campos (las cargas para el campo eléctrico y las corrientes para el campo magnético) desaparece la diferencia más notable entre ambos: la existencia de cargas eléctricas y la inexistencia de “cargas magnéticas”.

Además, si observáis las nuevas expresiones, también podéis detectar que las únicas fuentes u orígenes de uno de los campos son precisamente las variaciones que se producen en el otro campo. Es decir, es como si los dos campos se estuviesen "realimentando" el uno al otro.

Este concepto de "realimentación" mutua entre los campos eléctrico y magnético es muy importante y será clave para entender las ondas electromagnéticas que estudiaremos más adelante.

3.6. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos introducido y analizado las leyes de Maxwell. Hemos visto que estas cuatro leyes son en realidad derivaciones de las distintas leyes que hemos visto en las secciones anteriores.

Así, hemos visto que la primera y la segunda leyes de Maxwell corresponden, respectivamente, a las leyes de Gauss para la electrostática y la magnetostática, y explican las características de los campos eléctrico y magnético por separado.

También hemos visto que la tercera y la cuarta leyes indican la relación entre los campos eléctrico y magnético. La tercera ley de Maxwell corresponde a la ley de inducción de Faraday y, por tanto, relaciona la creación de campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables. La cuarta ley de Maxwell indica el proceso contrario a la tercera: la creación de campos magnéticos a partir de campos eléctricos variables.

A continuación hemos analizado las cuatro leyes en algunos casos particulares. En primer lugar, hemos visto qué forma toman las leyes cuando los campos son estacionarios y, por tanto, las únicas fuentes de generación son las cargas y las corrientes eléctricas.

El otro caso que hemos estudiado es el complementario del anterior, es decir, cuando no hay ni cargas ni corrientes y, por tanto, la única fuente de generación de los campos son ellos mismos. Hemos visto que este caso es muy interesante, ya que nos indica que los campos eléctrico y magnético se alimentan mutuamente de manera indefinida, hecho que dará pie al contenido del próximo apartado.

4. Ondas electromagnéticas

Ya hemos introducido y detallado las leyes de Maxwell y hemos visto que resumen todo el comportamiento de los campos eléctrico y magnético tanto de manera individual como en conjunto. Precisamente, respecto a este último punto (la interrelación entre los dos campos) hemos visto un ejemplo claro en el último caso particular que hemos estudiado: el estudio de las leyes de Maxwell para campos no estacionarios y en ausencia de cargas y corrientes. En este último caso, en el que faltaban las "fuentes" propias de los campos eléctrico y magnético (cargas y corrientes, respectivamente), hemos podido observar que ambos campos se "realimentan" entre sí.

Podéis ver las leyes de Maxwell en el apartado 3 de este módulo.
Podéis ver un ejemplo de la interrelación entre los dos campos en el subapartado 3.5.3 de este módulo.

Pero ¿en qué consiste esta realimentación? Y, sobre todo, ¿cómo se produce? En este apartado veremos ambas cosas. Antes, sin embargo, nos introduciremos en los conceptos de energía electromagnética y el vector de Poynting.

4.1. Energía electromagnética. Vector de Poynting

Hasta ahora hemos introducido los campos eléctrico y magnético y hemos visto que las fuerzas eléctrica y magnética, como cualquier fuerza, presentan una energía asociada. Más adelante hemos visto, en las leyes de Maxwell, que existe una estrecha interrelación entre las dos interacciones de manera que en realidad lo que tenemos es un campo electromagnético. ¿Podríamos hablar entonces de energía electromagnética? Pues la respuesta es que sí.

Precisamente la interrelación entre los campos eléctrico y magnético, y en concreto esta "realimentación" que ya hemos introducido, se traduce en el hecho de que hay una transferencia de energía entre los dos campos. Y es entonces cuando hablamos de flujo de energía electromagnética.

Podéis ver la interrelación entre los dos campos en el subapartado 3.5.3 de este módulo.

El flujo de energía electromagnética se puede cuantificar mediante un nuevo concepto: el vector de Poynting (en honor del físico inglés John Henry Poynting, que fue el primero que lo definió).

John Henry Poynting

Físico inglés (9 de septiembre de 1852-30 de marzo de 1914) que contribuyó a la investigación en varios ámbitos de la física en general y del electromagnetismo en particular, como el estudio de la energía electromagnética. Entre sus logros más importantes destacan el teorema de Poynting y el efecto Poynting-Robertson.

El **vector de Poynting** $\vec{S}$ es una magnitud que mide el flujo de energía electromagnética y en el vacío se define como:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad (163)$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son el campo eléctrico y magnético, respectivamente, y μ_0 es la permeabilidad del vacío.

Como podéis observar, la definición del vector de Poynting incluye el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$. Por tanto, el vector de Poynting ($\vec{S}$) siempre será un vector perpendicular tanto al campo magnético comp al campo eléctrico (podéis ver la figura 30).

Figura 30

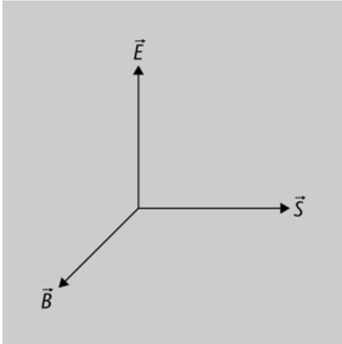


Figura 30

La imagen es la representación de $\vec{E}, \vec{B}$ i $\vec{S}$.

Aquí se introduce un nuevo interrogante. ¿Como se propaga esta energía? ¿Lo hace de forma instantánea?

Precisamente una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell es la deducción que se puede hacer a partir de ellas de un hecho interesante: su propagación se produce mediante ondas electromagnéticas. Y más aún, las propias ecuaciones permiten deducir las ecuaciones de propagación de estas ondas. Lo veremos a continuación.

4.2. Deducción de la ecuación de ondas a partir de las ecuaciones de Maxwell

Podéis ver las leyes de Maxwell en el apartado 3 de este módulo.
Podéis ver un caso particular de la interrelación entre los dos campos en el subapartado 3.5.3 de este módulo.

Podéis deducir la ecuación de ondas a partir de las leyes de Maxwell que ya hemos visto. Las reescribiremos para el último caso particular que hemos estudiado: ausencia de cualquier medio material, carga eléctrica ($\rho = 0$) o corriente eléctrica ($\vec{J} = 0$). Además las escribiremos para el caso de propagación para el vacío, es decir, tomaríamos μ_0 y ε_0. En esta situación, las ecuaciones se simplifican de modo notable. Recordemos el cambio en la tabla 7, en forma diferencial, donde tenemos las ecuaciones genéricas, provinientes de la tabla 3, y las ecuaciones sin cargas ni corrientes, provinientes de la tabla 6.

Tabla 7

	Expresión "normal"	Expresión sin cargas ni corrientes eléctricas
1.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (164)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (168)
2.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (165)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (169)
3.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (166)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (170)
4.ª ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (167)	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (171)

A partir de esta nueva situación, podemos comenzar a operar con las nuevas ecuaciones. Comenzaremos a trabajar con las ecuaciones tercera (170) y cuarta (171), que tratan con los rotacionales de los campos eléctrico y magnético. Elegimos estas dos ecuaciones porque incluyen la dependencia cruzada de ambos campos, es decir, muestran que la variación en el tiempo de un campo crea el otro.

En ambas ecuaciones aparece un rotacional en el primer término pero no en el segundo. Vamos a ver qué sucede si calculamos el rotacional en ambas lados:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \qquad (172)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\qquad(173)$$

Los últimos términos de las ecuaciones anteriores se pueden sustituir por los equivalentes respectivos que podéis obtener a partir de las propias ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, observad que ahora hay que proceder al revés. Es decir, en la ecuación (172), que hemos deducido de la tercera ley de Maxwell, hay que utilizar la cuarta ley, (171), y en la ecuación (173), que hemos deducido de la cuarta ley, ahora hay que utilizar la tercera (170). Al hacer estas sustituciones, se obtendrá:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\qquad(174)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\qquad(175)$$

Como podéis ver, en las expresiones anteriores se está aplicando el operador nabla dos veces (se hace el "rotacional del rotacional"). Se trata, por tanto, de expresiones complicadas de tratar. No obstante, podemos simplificarlas utilizando la identidad vectorial siguiente:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{v}\qquad(176)$$

Propiedad del operador nabla $\vec{\nabla}$

La identidad

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{v}$$

es una propiedad matemática del operador nabla y es válida para cualquier vector $\vec{v}$.

Esta identidad es válida para cualquier vector y, por tanto, se podrá aplicar tanto a $\vec{E}$ como a $\vec{B}$. La ventaja de utilizar esta identidad es que nos aparecerán los términos $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ y $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ que, de acuerdo con las modificaciones de la primera ley (168) y de la segunda (169), serán igual a cero.

Así, las expresiones simplificadas quedan de la manera siguiente:

$$0-\vec{\nabla}^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\qquad(177)$$

$$0-\vec{\nabla}^2\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\qquad(178)$$

Y estas ecuaciones tienen nombre propio: son las ecuacions de onda.

Las ecuaciones de onda de los campos eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{B}$) son:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}^2\vec{E}=0\qquad(179)$$

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}^2\vec{B}=0\qquad(180)$$

Si recordáis, ya introdujimos la ecuación general de una onda que se propaga con una velocidad *c*, que tenía la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{u} = 0 \qquad (181)$$

Si os fijáis bien en las dos ecuaciones que habéis acabado deduciendo, (179) y (180) , podéis observar que siguen el modelo de una ecuación de onda (181) y que su velocidad de propagación es:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad (182)$$

Aquí nos encontramos con otro de los descubrimientos más relevantes dentro del desarrollo del electromagnetismo. Si calculáis la velocidad utilizando los valores conocidos de la permitividad eléctrica (ε_0) y de la permeabilidad magnética (μ_0) del vacío:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \end{aligned} \qquad (183)$$

obtendréis el valor siguiente:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}998 \cdot 10^9\ \mathrm{m/s} \qquad (184)$$

que corresponde a la velocidad de la luz en el vacío!

Las leyes de Maxwell permiten deducir que:

- Los campos eléctrico y magnético se propagan en forma de ondas electromagnéticas y con una velocidad de propagación en el vacío igual a la **velocidad de la luz:**

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}998 \cdot 10^9\ \mathrm{m/s} \qquad (185)$$

- Esta coincidencia entre la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas y la velocidad de la luz hizo suponer a Maxwell que esta última es, en el fondo, un tipo de onda electromagnética.

Ecuación de ondas

La ecuación diferencial que explica el comportamiento de una onda cualquiera que se propaga con una velocidad *c* es:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \vec{u} = 0$$

Podéis ver la ecuación general de una onda que se propaga con una velocidad *c* en el módulo "Ondas".

Podéis ver la luz como onda electromagnética en el módulo "Ondas".

4.3. Relación entre los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética

Ya hemos deducido y estudiado de modo extensivo las leyes de Maxwell y hemos analizado sus consecuencias. Sin embargo, hemos dejado para este subapartado una de ellas: la relación entre los campos eléctrico y magnético.

Podéis ver las leyes de Maxwell en el apartado 3 de este módulo.

En efecto, podemos analizar la tercera y cuarta leyes de Maxwell en ausencia de las "fuentes" de los campos, es decir, en ausencia de cargas y corrientes eléctrica. De esta manera, se considera que los campos eléctrico y magnético están generados únicamente por ellos mismos:

Podéis ver las leyes de Maxwell en el apartado 3.5 y las tablas 6 y 7 de este módulo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{186}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{187}$$

La primera conclusión que podemos extraer hace referencia a las direcciones de los campos. Fijaos en que en ambos casos la dirección de uno de los campos es la misma que la del rotacional del otro. Y, si recordáis, el rotacional de un vector siempre es un segundo vector perpendicular al primero.

Podéis ver el rotacional de un vector en el apartado 2.3.1 de este módulo.

En consecuencia, lo que tenemos es que estos dos campos son perpendiculares entre sí.

Los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ siempre son **perpendiculares** entre sí

Por tanto, la dirección de uno de los campos nos determina de manera unívoca la dirección del otro. Ahora bien, ¿qué sucede con sus magnitudes? ¿También están relacionadas? Vamos a comprobarlo.

Supongamos, por ejemplo, que el módulo del campo eléctrico es proporcional al del campo magnético:

$$\left\|\vec{E}\right\| = \alpha \left\|\vec{B}\right\| \tag{188}$$

El valor de la constante de proporcionalidad α debería ser tal que se satisfagan la tercera (186) y cuarta (187) leyes de Maxwell. El único valor para esta constante que satisface las dos leyes es:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{189}$$

Podéis comprobar que este valor es precisamente la velocidad de la luz o de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío (184):

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}998 \cdot 10^9 \ ^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}} \tag{190}$$

La relación entre los módulos del campo eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{B}$) en una onda electromagnética es, por tanto:

$$\left\|\vec{E}\right\| = c\left\|\vec{B}\right\| \qquad (191)$$

Actividad

Verificad que si $\left\|\vec{E}\right\|$ y $\left\|\vec{B}\right\|$ tienen la relación de la ecuación (191), se verifican las ecuaciones (186) y (187).

4.4. Resolución de la ecuación de ondas para el caso de ondas planas

Las ecuaciones de ondas que acabamos de introducir tendrán una solución general que comprende infinitas soluciones particulares. No obstante, estudiaremos solo un caso concreto: el de una onda plana armónica que se propaga en una sola dirección. En la figura 31 se muestra un esquema representativo de una onda plana armónica.

Figura 31

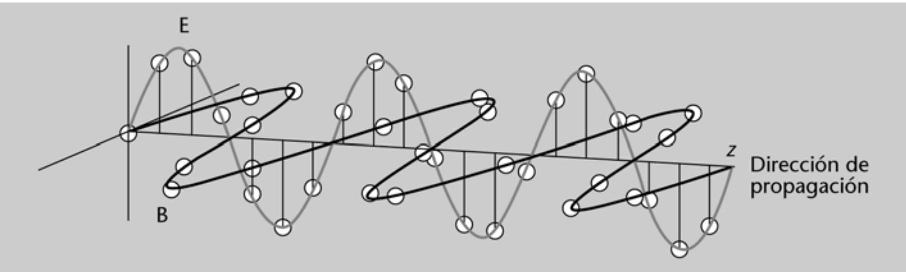


Figura 31

La imagen muestra un esquema representativo de una onda plana que se propaga en el eje z. En una onda plana, los campos eléctrico y magnético son constantes a lo largo de cualquier plano que sea perpendicular a la dirección de propagación. Por tanto, sólo habrá gradiente de campo en la dirección z.

En el ejemplo de la figura, una onda plana se propaga a lo largo de la dirección del eje *z*. En una onda de este tipo, encontramos dos características significativas:

- Los campos eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{B}$) oscilan o "vibran" en direcciones perpendiculares a la dirección de propagación. Por tanto, se tratará de ondas transversales.

Las ondas electromagnéticas planas son **ondas transversales**.

Recordad

Una onda transversal es aquella en la que sus oscilaciones se producen en una dirección perpendicular a la dirección de propagación.

Podéis ver las ondas transversales en el módulo "Ondas".

Esto significa que tendremos:

$$E_z = 0$$
$$B_z = 0 \qquad (192)$$

- En un instante determinado, los campos eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{B}$) son constantes respecto a cualquier dirección que sea perpendicular a la dirección de propagación. Por tanto,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = 0 \tag{193}$$

Y en consecuencia:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} = 0 \tag{194}$$

Con esta consideración, las ecuaciones de ondas (179) y (180) se simplifican y quedan:

Recordad

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0 \tag{195}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = 0 \tag{196}$$

Las soluciones particulares de estas ecuaciones son:

Podéis ver las soluciones particulares de las ecuaciones de ondas en el módulo "Ondas".

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t + \Phi_0)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kz - \omega t + \Phi_0) \tag{197}$$

Recordad

Una ecuación diferencial tiene una **solución general** que comprende infinitas **soluciones particulares** posibles.

donde los primeros factores ($\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$) son constantes, e indican las **amplitudes** tanto del campo eléctrico $\vec{E}$ como del magnético $\vec{B}$.

El argumento del coseno, $kz - \omega t + \Phi_0$, corresponde a la fase de la onda; k es la constante de propagación; ω la frecuencia angular, y Φ_0 es la fase inicial. En el vacío:

$$\frac{\omega}{k} = c \tag{198}$$

Podéis ver la fase de la onda en el módulo "Ondas".

Fijaos en las unidades $[\omega] = 1/\mathrm{s}$ y $[k] = 1/\mathrm{m}$. Por tanto $[c] = \mathrm{m/s}$, que son unidades de velocidad.

A partir de ahora tomaremos $\Phi_0 = 0$.

En el ámbito del electromagnetismo se prefiere sustituir el segundo término por otro tipo de expresiones denominadas **fasores**, tal como os mostramos a continuación:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(kz-\omega t)} \tag{199}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(kz-\omega t)} \tag{200}$$

Los términos $e^{j(kz-\omega t)}$ son variables en el tiempo y en el espacio y se denominan **fasores**. Un fasor es un número complejo que equivale a:

$$e^{j(kz-\omega t)} = \cos(kz - \omega t) + j\text{sen}(kz - \omega t) \tag{201}$$

Podéis comprobar que el módulo del fasor siempre vale 1 y, por tanto, se trata de un factor que no modifica la amplitud de la onda, sino solo su fase. También podéis comprobar que, aparte del tiempo, este término solo depende de la dirección de propagación z (lógico, dado que se trata de una onda plana).

Así, ya hemos visto cómo son las expresiones de una onda electromagnética armónica plana que se propaga a lo largo de la dirección z. Para encontrar la expresión para una onda que se propaga en una dirección cualquiera, haremos la sustitución siguiente:

$$kz \to \vec{k} \cdot \vec{r} \tag{202}$$

Analicemos esta nueva expresión ($\vec{k} \cdot \vec{r}$):

- $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es un vector que indica la dirección de propagación y su módulo es el número de onda (también denominado constante de propagación) que ya habéis visto.
- $\vec{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición que sustituye la z. En el caso particular que hemos tratado; $\vec{r} = (0, 0, z)$.

Por tanto, tendremos que:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \tag{203}$$

Así, resumiendo:

Las expresiones para los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en una onda armónica plana son:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{204}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{205}$$

donde $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ son la amplitud de los campos eléctrico y magnético (es decir, su valor máximo), ω es la frecuencia angular de oscilación y $\vec{k}$ es la constante de onda de propagación.

_j_ en vez de _i_ como unidad de los números imaginarios

Cuando se trabaja en el ámbito del electromagnetismo se emplea *j* para indicar la unidad imaginaria *i*. El motivo de este convenio es para que no se produzca confusión con la corriente eléctrica, que se indica también con *i* o *I*.

Recordad

Un número complejo es un número del tipo $z = a + jb$, donde a y b son números reales y j es la unidad imaginaria ($j = \sqrt{-1}$)

Podéis ver el número de onda en el módulo “Ondas”.

Recordad

La **frecuencia angular** ω y el **número de onda** o **constante de propagación** $\vec{k}$ son los dos parámetros que, junto con la amplitud, determinan cómo es y cómo se propaga una onda.

ω corresponde a la “frecuencia temporal” o velocidad con la que oscila la magnitud en un punto fijo determinado.

El módulo de $\vec{k}$ corresponde a la “frecuencia espacial” o cantidad de máximos o mínimos que se producen en una distancia determinada a lo largo de la dirección de propagación.

Así, a partir de ahora utilizaremos el vector $\vec{k}$ para expresar la dirección de propagación. Su módulo corresponde al número de onda. Respecto a su dirección, esta corresponde a la dirección de propagación de la onda. Y dado que estamos estudiando el caso de una onda plana, tendremos que tanto el campo eléctrico $\vec{E}$ como el campo magnético $\vec{B}$ no presentan componente en esta dirección. Por tanto, la dirección del vector $\vec{k}$, es decir, la dirección de propagación, es perpendicular a las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

Podéis ver que el módulo corresponde al número de onda en el módulo "Ondas".

En una onda plana, las direcciones de $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$ son **perpendiculares** entre sí.

Podemos obtener la expresión matemática que relaciona los tres, ya que:

- de la ecuación $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ (ecuación 191) sabemos la relación entre los módulos,
- de la figura 31 sabemos que si hacemos el producto vectorial de $\vec{k}$ y $\vec{E}$ (pero no al revés), obtenemos $\vec{B}$.

Recordad

En el vacío $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Con toda esta información podemos escribir la relación matemática entre $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$:

Recordad

Un vector $\vec{k}$ se puede escribir como el producto de su módulo, *k*, por el vector unitario en su dirección y $\hat{k}$:

$$\vec{k} = k\hat{k}$$

Los vectores $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$ se relacionan de la siguiente manera en el vacío:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{k}{\omega}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{c}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) \tag{206}$$

donde ε_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del vacío.

Fijaos en que en los dos últimos términos hemos escrito $\hat{k}$ para indicar que es un vector unitario en la dirección de $\vec{k}$.

Figura 32

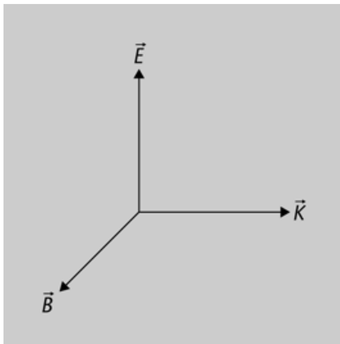


Figura 32

La imagen es la representación de $\vec{k}$, $\vec{B}$ i $\vec{E}$.

En la figura 32 tenemos representados los tres vectores.

4.5. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos visto que a partir de las leyes de Maxwell se deduce que la energía electromagnética se propaga mediante ondas electromagnéticas y hemos determinado la expresión y la velocidad de propagación, que en el vacío corresponde a la velocidad de la luz en el vacío (lo que no sorprende porque, de hecho, la luz es una onda electromagnética).

También hemos introducido algunos conceptos relacionados con la propagación de la energía electromagnética, como el vector de Poynting, que nos servirán para otros módulos.

A partir de las leyes de Maxwell se deducen las ecuaciones que explican el comportamiento de los campos eléctrico y magnético:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0 \tag{207}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0 \tag{208}$$

Estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones de una onda, que denominamos **onda electromagnética**, cuya velocidad de propagación es:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{209}$$

Podemos comprobar que $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s, que es el valor ya conocido de la velocidad de la luz en el vacío.

5. Problemas resueltos

5.1. Enunciados

1. Sabiendo que el módulo del campo eléctrico creado para una carga puntual q ubicada en el punto (0, 0) sobre un punto que se encuentra a una distancia d es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} \tag{210}$$

determinad el flujo de campo eléctrico debido a la carga q para las superficies cerradas siguientes:

a) una esfera de radio R centrada en (0, 0),
b) una esfera de radio $2R$ centrada en (0, 0).

Haced el cálculo de los flujos primero mediante la definición de flujo y después mediante el **teorema de Gauss**, y comprobad que los resultados son idénticos en ambos casos.

2. En una cierta región del espacio está presente un campo electrostático uniforme regido por la expresión siguiente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -10\ \vec{i}\,[\mathrm{N}/\mathrm{C}] \tag{211}$$

Determinad la fuerza electrostática experimentada por:

a) una carga puntual de valor $Q = -5$ μC ubicada en el punto (1, 1),
b) un segmento de hilo con carga $Q = -5$ μC que se extiende entre los puntos (0, 0) y (1, 1),
c) una esfera de radio $R = 1$ con carga $Q = -5$ μC y centrada en (0, 0).

3. El campo electrostático en un punto es:

$$\vec{E} = 100\vec{i} + 300\,\vec{j}\ N/C$$

Calculad y comparad el campo de desplazamiento $\vec{D}$ en el mismo punto cuando el medio material es el vacío y cuando es agua a 20 °C de temperatura ($\varepsilon_r = 80$).

4. El potencial electrostático en una cierta región del espacio es:

$$V(\vec{r}) = x^2 + 3yz^2\ (\mathrm{V})$$

Determinad la expresión general del campo eléctrico en esta misma región y calculad la magnitud en el punto $\vec{r} = \vec{i} + 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$.

5. El potencial vectorial magnético en una cierta región dele espacio es

$$\vec{A}(\vec{r}) = x\vec{i} + yz\,\vec{j} \tag{212}$$

Determinad la expresión general del campo magnético en esta misma región y calculad su magnitud en el punto $\vec{r} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$.

6. En una cierta región del espacio existe un campo eléctrico $\vec{E}$ determinado por la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 4x\mathrm{sen}\left(4\pi \cdot 10^6 t + \pi\right)\vec{j}\ \left(\mathrm{N}/\mathrm{C}\right) \tag{213}$$

Si suponemos que la región está libre de cargas y corrientes eléctricas, determinad la expresión general del campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ asociado a este campo.

7. En una onda armónica plana, el campo eléctrico $\vec{E}$ oscila con la amplitud $\vec{E}_0 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ y se propaga en la dirección $\vec{k} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right)$. Determinad el campo magnético $\vec{B}$ de la onda.

5.2. Soluciones

1. Recordemos la definición de flujo de campo eléctrico a través de una superficie S (3):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{214}$$

donde el signo $\oint$ indica que la superficie S es cerrada.

Figura 33

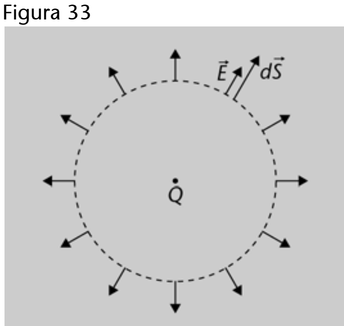


Figura 33

La imagen muestra la carga cerrada dentro de una esfera. También se representan el campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector de superficie.

Antes de proceder con el cálculo, analizemos la geometría del problema. Las dos superficies respecto a las cuales se debe calcular el flujo son esféricas. Esto significa que (podéis ver la figura 33):

- El campo eléctrico ($\vec{E}$) siempre será perpendicular a la superficie en ambos casos, ya que el campo creado por una carga puntual solo tiene componente radial (podéis consultar la figura 2).

- El módulo del campo eléctrico (E) es constante, ya que la distancia d es la misma para toda la superficie (la carga está ubicada en el centro de la esfera).

Estas dos características simplifican el cálculo del flujo, ya que tanto $\vec{E}$ como $d\vec{S}$ son paralelos y, por tanto, $\vec{E}d\vec{S} = E \cdot dS$, y dado que E es constante en toda la superficie, sale de la integral:

$$\Phi_E = E\oint_S dS \tag{215}$$

Y, por tanto:

$$\Phi_E = E \cdot S \tag{216}$$

Es decir, basta con multiplicar el módulo del campo eléctrico por el valor de la superficie de la esfera.

a) Para el caso de la esfera de radio R, la distancia es $d = R$ y, por ende, el campo eléctrico es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \tag{217}$$

Y la superficie de la esfera es:

$$S = 4\pi R^2 \tag{218}$$

Para calcular el flujo, multiplicamos (217) y (218):

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 \tag{219}$$

Los términos 4π i R^2 se cancelan porque están multiplicando y dividiendo a la vez y, por tanto, obtenemos:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{220}$$

Podéis comprobar que esta expresión es idéntica a la que encontraríais en la ley de Gauss (8), ya que la carga q es la única que se encuentra en el interior de la superficie.

b) Para el caso de la esfera de radio $2R$, la distancia es $d = 2R$ y, por tanto, tenemos:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2R)^2} \tag{221}$$

$$S = 4\pi(2R)^2 \tag{222}$$

Y el flujo será:

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2R)^2} \cdot 4\pi(2R)^2 \tag{223}$$

Como en el apartado (a), los términos 4π y $(2R)^2$ se cancelan porque se encuentran multiplicando y dividiendo a la vez y, por ello, obtenemos el mismo resultado:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{224}$$

También, como en el apartado (a), podéis comprobar que se satisface la ley de Gauss (8), ya que la carga q es la única que se encuentra en el interior de la superficie.

2. Según la ecuación (18), la fuerza electrostática experimentada por una distribución continua de carga es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_\Gamma \vec{E}(\vec{r})\,dq \tag{225}$$

Dado que el campo eléctrico es uniforme (constante), podemo sacarlo fuera de la integral:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\int_\Gamma dq \tag{226}$$

El resultado de la integral es precisamente el valor total de la carga de las distribuciones. En los tres casos es $Q = -5 \cdot 10^{-6}$ C. Así pues,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot \left(-10\ \vec{i}\right) = +5 \cdot 10^{-5}\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N}/\mathrm{C}\right) \tag{227}$$

3. Según la ecuación (35), el campo de desplazamiento eléctrico es:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{228}$$

Para el caso del vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2):

$$\vec{D} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \left(100\vec{i} + 300\vec{j}\right)\ \mathrm{C/m^2} = \left(0{,}885\vec{i} + 2{,}566\vec{j}\right)\ \mathrm{nC/m^2}$$

Para el caso del agua ($\varepsilon_r = 80$):

$$\varepsilon = 80\varepsilon_0 = 7{,}08 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$$

$$\vec{D} = 7{,}08 \cdot 10^{-10} \cdot \left(100\ \vec{i} + 300\ \vec{j}\right)\ \mathrm{C/m^2} = 70{,}8\vec{i} + \ 212{,}4\vec{j}\ \ \mathrm{nC/m^2}$$

Podéis comprobar que el cociente entre los valores de los dos campos es precisamente 80, que corresponde a la permitividad relativa (ε_r) del agua.

4. Recordemos la relación entre el potencial y el campo eléctricos (23):

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{229}$$

Por tanto, deberemos calcular el gradiente del potencial que, si os acordáis, es un vector cuyas coordenadas son las derivadas parciales respecto a x, y y z, respectivamente. Así, lo primero que debemos hacer es calcular estas derivadas. Comencemos por la derivada respecto a x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3yz^2\right) = 2x + 0 = 2x \tag{230}$$

Fijaos en que el término $3yz^2$ es como si no existise porque no depende de x y, por tanto, su derivada es 0.

Respecto a la derivada de y:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3yz^2\right) = 0 + 3z^2 = 3z^2 \tag{231}$$

Podéis observar que los términos x^2, 3 y z^2 no dependen de y y, por tanto, deben ser tratados como constantes.

Finalmente, la derivada respecto a z:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3yz^2\right) = 6yz \tag{232}$$

De modo similar a como sucedía con la derivada respecto a y, los términos x^2, 3 y z^2 no dependen de z y, por tanto, deben ser tratados como constantes.

El gradiente del potencial será un vector cuyos componentes son las expresiones que acabamos de encontrar, ecuaciones (230), (231) y (232):

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = 2x\vec{i} + 3z^2\vec{j} + 6yz\vec{k} \tag{233}$$

Y, por tanto, el campo eléctrico será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -2x\vec{i} - 3z^2\vec{j} - 6yz\vec{k}$$

Para encontrar la magnitud del campo en el punto $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, sólo hay que sustituir los valores correspondientes:

$$\vec{E}(1,3,-2) = -2 \cdot 1\vec{i} - 3 \cdot (-2)^2 \vec{j} - 6 \cdot 3 \cdot (-2)\vec{k}$$

$$\vec{E}(1,3,-2) = -2\vec{i} - 12\vec{j} + 36\vec{k} \text{ N/C}$$

5. Recordemos la relación entre el potencial vectorial y el campo magnético (66):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{234}$$

Por tanto, para encontrar el campo magnético $\vec{B}$ deberemos calcular el rotacional del potencial vectorial magnético $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{235}$$

Tomemos el potencial vectorial magnético y calculemos las derivadas parciales que necesitamos:

$$\begin{gathered} \vec{A}(\vec{r}) = x\vec{i} + yz\vec{j} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \end{gathered} \tag{236}$$

Por tanto, el campo magnético $\vec{B}$ será:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = y\vec{i} \tag{237}$$

Para encontrar el campo en el punto $\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, debemos sustituir estos componentes en la ecuación anterior:

$$\vec{B} = -2\vec{i} \text{ T} \tag{238}$$

6. En ausencia de cargas y de corrientes eléctricas, la única “fuente” de creación de campo eléctrico $\vec{E}$ es la existencia de campos magnéticos variables $\vec{B}$. La magnitud del campo eléctrico generado por un campo magnético variable se puede determinar a partir de la tercera ley de Maxwell (que es la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday), ecuación (110):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{239}$$

Para resolver la ecuación, hay que multiplicar ambos lados por dt y después integrarlas:

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot dt = -d\vec{B}$$

$$\int\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot dt = -\int d\vec{B} \tag{240}$$

Por tanto, el campo magnético $\vec{B}$ será:

$$\vec{B} = -\int\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot dt \tag{241}$$

Determinemos en primer lugar cuánto vale $\vec{\nabla}\times\vec{E}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{242}$$

Podemos comprobar que todas las derivadas parciales son cero a excepción del término $\frac{\partial E_y}{\partial x}$. Por tanto, tendremos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = (0-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left[4x\,\text{sen}\left(4\pi\cdot 10^6 t+\pi\right)\right]}{\partial x}-0\right)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 4\sin\left(4\pi\cdot 10^6 t+\pi\right)\vec{k} \tag{243}$$

Segun la ecuación (241), para encontrar el campo magnético $\vec{B}$ hay que integrar la expresión (243) respecto al tiempo. Por tanto:

$$\vec{B} = -\int\left(4\,\text{sen}\left(4\pi\cdot 10^6 t+\pi\right)\vec{k}\right)\cdot dt$$

$$\vec{B} = \frac{4}{4\pi\cdot 10^6}\cos\left(4\pi\cdot 10^6 t+\pi\right)\vec{k}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\pi}10^{-6}\cos\left(4\pi\cdot 10^6 t+\pi\right)\vec{k}\ [\text{T}] \tag{244}$$

7. Hemos visto que, en una onda plana, las direcciones de $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$ son perpendiculares entre sí. Por tanto, podemos determinar $\vec{E}$ a partir de $\vec{B}$ y viceversa, si conocemos la dirección de propagación $\vec{k}$.

Podéis ver las ondas planas en el subapartado 4.4 de este módulo.

$$\vec{k} = \left(2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}\right)\text{m}^{-1} \tag{245}$$

$$\vec{E}_0 = 3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\ \text{N/C} \tag{246}$$

Podemos escribir la onda plana con la ecuación (204):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \tag{247}$$

Donde:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) \cdot \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}\right) = 2x + 2y - 2z \tag{248}$$

Y para obtener ω podemos aplicar la ecuación (198).

$$\omega = c \cdot k = c\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2c\sqrt{3} \tag{249}$$

Por tanto:

$$\vec{E} = \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) e^{\vec{j}\left((2x+2y-2z)-2c\sqrt{3t}\right)} \, \mathrm{N}/C \tag{250}$$

Una vez tenemos el campo $\vec{E}$, podemos obtener $\vec{B}$ con la ecuación (198).

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{c}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{2\sqrt{3}}\right) \times \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) e^{\vec{j}\left(2x+2y-2z-2c\sqrt{3t}\right)}\right] = \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{3}}\left\{\left[2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)\right]\vec{i} - \left[2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)\right]\vec{j} + \left[2 \cdot (-2) - 2 \cdot 3\right]\vec{k}\right\} e^{j\left(2x+2y-2z-2c\sqrt{3t}\right)}\end{aligned} \tag{251}$$

De donde:

$$\vec{B} = \frac{1}{2c\sqrt{3}} = \frac{1}{2c\sqrt{3}}\left(-2\vec{i} - 8\vec{j} - 10\vec{k}\right) e^{j\left(2x+2y-2z-2c\sqrt{3t}\right)} \; [\mathrm{T}] \tag{252}$$

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores es un tercer vector con dirección perpendicular a los dos primeros.

Se calcula de la manera siguiente:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \\ + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

Resumen

Las cargas eléctricas en reposo generan un **campo electrostático** $\vec{E}(\vec{r})$ en el espacio de su alrededor. Podemos representar de manera cualitativa este campo mediante las **líneas de campo**, que expresan la dirección, el sentido y la magnitud del campo eléctrico en una región. Las líneas de campo siempre comienzan y acaban allí donde hay cargas eléctricas y no se pueden cruzar nunca en ningún otro lugar.

El **flujo de campo eléctrico** Φ_E es una medida del número de líneas de campo $\vec{E}$ que atraviesan una superficie *S* determinada. La **ley de Gauss para el campo electrostático** enuncia que el balance de flujo de campo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada, es decir, el balance entre las líneas de campo que salen de la superficie menos las que entran sólo depende de la carga eléctrica neta en su interior. Para el vacío es:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{253}$$

Todo campo electrostático presenta un **potencial electrostático** $V(\vec{r})$ asociado en todos los puntos de su región de influencia. El conocimiento del potencial electrostático $V(\vec{r})$ en toda una región permite determinar de manera unívoca el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en toda la región, ya que ambos se relacionan mediante la operación **gradiente**:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \tag{254}$$

Cuando un campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ externo afecta a una región donde hay un **material dieléctrico** (no conductor) se produce la **polarización** $\vec{P}$ del material, es decir, una redistribución de las cargas eléctricas internas del material de manera que el campo eléctrico "efectivo" en su interior se reduce. Los efectos de esta polarización sobre el campo eléctrico se engloban dentro del concepto de **permitividad eléctrica** del material (ε).

Si el material es **conductor**, dado que las cargas eléctricas se pueden mover con liberdad, el campo eléctrico en su interior es $\vec{E} = 0$. Esto implica, por tanto, que el potencial electrostático es constante (V = *constante*).

Las cargas en movimiento y, por extensión, las corrientes eléctricas generan un **campo magnético inducido**. De manera análoga al campo electrostático, podemos representar este campo magnético mediante líneas de campo y definir el **flujo de campo magnético** Φ_B como una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie *S* determinada.

La **ley de Gauss para el campo magnético** enuncia que el balance de flujo sobre cualquier superficie cerrada es siempre cero. Este hecho implica que, a diferencia del campo electrostático, no existen "cargas magnéticas" donde puedan comenzar o acabar las líneas de campo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{255}$$

El teorema de Gauss, tanto para el campo eléctrico como magnético, se puede expresar en forma diferencial mediante el concepto matemático de la **divergencia**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{256}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{257}$$

La **ley de Ampère-Maxwell** relaciona el campo magnético con sus causas: las corrientes eléctricas y las corrientes de desplazamiento. Para el vacío es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \tag{258}$$

La **ley de inducción de Faraday** explica la generación de campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{259}$$

La ley de Ampère-Maxwell y la ley de inducción de Faraday también se pueden escribir en forma diferencial mediante el concepto matemático del **rotacional**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{260}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{261}$$

Cuando un campo magnético externo ($\vec{B}_0$) actúa sobre una región donde hay un cierto medio material, se produce la **magnetización** del material ($\vec{M}$). Esta magnetización produce un campo magnético adicional que hay que considerar a la hora de determinar el campo magnético "real" o "efectivo" $\vec{B}$. La relación entre $\vec{B}_0$ y $\vec{B}$ viene determinada por la **permitividad**

magnética relativa del material (μ_r). Los valores de esta constante varían mucho entre los diferentes medios materiales según su comportamiento magnético. Los tipos de materiales magnéticos más habituales son los diamagnéticos, los paramagnéticos y los ferromagnéticos.

La observación conjunta de las leyes que determinan las propiedades de los campos eléctrico y magnético permiten deducir un cierto paralelismo y una estrecha relación entre ambos fenómenos. Expresadas en su forma diferencial, se convierten en las **leyes de Maxwell para el electromagnetismo**:

Leyes de Maxwell para el electromagnetismo en el vacío

Forma diferencial		**Forma integral**	
1. ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (262)	**Ley de Gauss para el campo eléctrico**	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (266)
2. ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (263)	**Ley de Gauss para el campo magnético**	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (267)
3. ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (264)	**Ley de inducción de Faraday**	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (268)
4. ley de Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (265)	**Ley de Ampère-Maxwell**	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ (269)

Un caso particular interesante para el que vale la pena analizar las ecuaciones es aquel en el que no hay ninguna carga ni corriente eléctrica. En este caso particular podemos observar que la única “fuente” de campo eléctrico es la variación de campo magnético y al revés. Esta interrelación entre los campos eléctrico y magnético indica que en realidad se trata de una única interacción: el electromagnetismo. La energía asociada a esta interacción conjunta es la energía electromagnética. Esta energía y su propagación se determinan mediante el **vector de Poynting**.

A partir de las leyes de Maxwell se deduce que la energía electromagnética se propaga mediante ondas electromagnéticas. Las expresiones para una onda armónica plana son:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \tag{270}$$

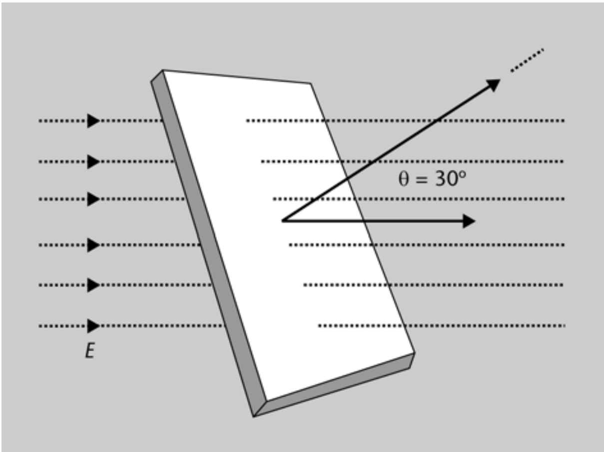
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \tag{271}$$

El vector $\vec{k}$ es la constante de onda e indica la dirección de propagación, que es perpendicular tanto a $\vec{E}$ como a $\vec{B}$.

Ejercicios de autoevaluación

1. El flujo de campo eléctrico debido a un campo de módulo $E = 2 \cdot 10^3$ N/C que atraviesa una superficie cuadrada de 10^{-4} m^2 que se encuentra orientada con un ángulo de $\theta = 30°$ con la dirección del campo eléctrico, tal como se muestra a la figura 34, vale...
a) $\Phi_E = 2{,}0$ Nm^2/C
b) $\Phi_E = 0{,}17$ Nm^2/C.
c) $\Phi_E = 0{,}10$ Nm^2/C.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

Figura 34



2. Si tenemos una carga Q situada en el centro de una esfera imaginaria de radio R, el flujo de campo eléctrico total a través de la superficie de la esfera...
a) siempre es 0 porque se trata de una superficie cerrada.
b) es proporcional a la carga Q pero no depende del valor del radio R.
c) es proporcional a Q y también es proporcional a R.
d) es proporcional a Q pero también es proporcional al cuadrado del radio R, ya que la superficie de una esfera es $S = 4\pi R^2$.

3. En una región del espacio, el campo eléctrico es $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ en todos los puntos. Esto significa que...
a) el potencial es $V(\vec{r}) = 0$ en todos los puntos de la región.
b) el potencial $V(\vec{r})$ es constante en todos los puntos de la región.
c) las dos respuestas anteriores son posibles.
d) el potencial puede ser tanto constante como variable, dado que el potencial no depende del campo eléctrico.

4. En una región del espacio hay un potencial eléctrico $V(\vec{r}) = x + 2y + 3z$ (V). El campo eléctrico en esta región...

a) es uniforme e igual a $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\,\mathrm{N/C}$.

b) es uniforme e igual a $E(\vec{r}) = 6\,\mathrm{N/C}$.

c) debe ser variable porque el potencial también lo es.

d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

5. Supongamos dos medios materiales con permitividades eléctricas relativas respectivas $\varepsilon_{r1} = 2$ y $\varepsilon_{r2} = 4$. El campo eléctrico generado por una distribución de carga cualquiera que se encuentre en el medio 2...
a) sería el doble del que tendremos en el medio 1 y cuatro veces más grande que en el vacío.
b) sería la mitad del que tendríamos en el medio 1 y cuatro veces más pequeño que en el vacío.
c) sería el doble del que tendríamos en el medio 1 y la mitad del que tendríamos en el vacío.
d) sería la mitad del que tendríamos en el medio 1 y el doble del que tendríamos en el vacío.

6. Un imán se introduce de forma parcial dentro de una superficie cerrada S, de tal manera que una parte del imán se encuenta fuera y la otra se encuentra dentro. El flujo de campo magnético Φ_B que atraviesa S...
a) es $\Phi_B = 0$, dado que se trata de una superficie cerrada.
b) depende de las características del imán (geometría, magnetización, etc.).
c) depende de qué fracción del imán se encuentra fuera y cuál se encuentra dentro.
d) depende de la permeabilidad magnética tanto del imán como del medio material del interior de S.

7. La divergencia del campo magnético ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$)...
a) depende de la permeabilidad magnética (μ) del medio.
b) es siempre cero, ya que el campo magnético siempre es uniforme.
c) es siempre cero, ya que no existen "cargas magnéticas".
d) en general es cero, pero puede ser diferente de cero si el campo magnético no es uniforme.

8. Una carga positiva q se encuentra en reposo en la posición $\vec{r} = (0, 0, 0)$. Cuando se le aplica un campo magnético $\vec{B} = 5\vec{i}$, la carga...
a) se acelera hacia la dirección x.
b) se acelera hacia la dirección y.
c) se acelera hacia la dirección z.
d) no se acelera.

9. Una carga negativa $-q$ se desplaza a lo largo del eje x con una velocidad $\vec{v}$ por una región donde existe un campo magnético $\vec{B}$ que apunta en la dirección del eje y. La fuerza magnética experimentada por la carga es...

a) $\vec{F} = -qvB\vec{k}$

b) $\vec{F} = qvB\vec{k}$

c) $\vec{F} = qvB\sin 45°\vec{k}$

d) $\vec{F} = 0$

10. Un cierto campo vectorial $\vec{v}(\vec{r})$ presenta siempre componentes radiales. Esto significa que...
a) su gradiente siempre es 0.
b) su divergencia es 0.
c) su rotacional es 0.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

11. Un solenoide genera un cierto campo magnético $\vec{B}$ en su interior. Si introducimos un material diamagnético en su interior, el campo magnético $\vec{B}$:
a) continúa teniendo la misma dirección y sentido pero aumenta en módulo.
b) continúa teniendo la misma dirección y sentido pero disminuye en módulo.
c) continúa teniendo la misma dirección pero ahora en sentido opuesto.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

12. Sometemos un material ferromagnético inicialmente desmagnetizado $\left(\vec{M} = 0\right)$ a un campo magnético en un sentido hasta que el material se magnetiza completamente, es decir, hasta que la magnetización es máxima. Para desmagnetizarlo, es decir, hacer que la magnetización vuelva a ser 0 $\left(\vec{M} = 0\right)$,...
a) sería suficiente con eliminar completamente el campo magnético inicial, ya que este es la causa.
b) habría que eliminar completamente el campo magnético inicial y aplicar otro de la misma magnitud en sentido opuesto.
c) habría que eliminar el campo magnético inicial y aplicar otro con una magnitud igual al valor de la coercitividad del material pero en sentido opuesto.
d) no habría que eliminar el campo magnético inicial ni cambiar el sentido, sería suficiente con reducir la magnitud hasta un valor igual a la coercitividad del material.

13. La ley de inducción de Faraday se puede expresar en forma diferencial y se convierte en...

a) la primera ley de Maxwell ($\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$).

b) la segunda ley de Maxwell ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$).

c) la tercera ley de Maxwell ($\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$).

d) la cuarta ley de Maxwell ($\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$).

14. El módulo del campo magnético en una cierta región es $\|\vec{B}\| = 5$. En ausencia de cargas y corrientes eléctricas, el módulo del campo eléctrico sería...

a) $\|\vec{E}\| = c5$

b) $\|\vec{E}\| = c/5$

c) $\|\vec{E}\| = 5/c$

d) $\|\vec{E}\| = 25/c^2$

15. En una onda electromagnética, el campo eléctrico $\vec{E}$ oscila en la dirección $1\vec{i} - 1\vec{j}$ y el campo magnético $\vec{B}$ lo hace en la dirección $1\vec{i} + 1\vec{j}$. La dirección de propagación de la onda será...

a) $\vec{i}$

b) $\vec{j}$

c) $\vec{k}$

d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

Solucionario

1. b; **2.** b; **3.** c; **4.** a; **5.** b; **6.** b; **7.** c; **8.** d; **9.** a; **10.** c; **11.** b; **12.** c; **13.** c; **14.** a; **15.** c

Glosario

campo de desplazamiento eléctrico *m* Campo vectorial definido para tener en cuenta sólo el campo eléctrico producido por las cargas libres, las no producidas en el fenómeno de la polarización eléctrica. El campo de desplazamiento eléctrico se relaciona con el campo electrostático por medio de la permitividad del medio.

campo de inducción magnética *m* Entidad matemática que se utiliza para concentrar, con una sola expresión, toda la información magnética de un sistema de cargas en movimiento. En un campo vectorial.

campo electrostático *m* Entidad matemática que se utiliza para concentrar, con una sola expresión, toda la información electrostática de un sistema de cargas. En un campo vectorial.

campo magnético *m* Denominación con la que a menudo se hace referencia, por abuso del lenguaje, al campo de inducción magnética. Campo vectorial definido para tener en cuenta solo las corrientes libres. No tiene en cuenta la magnetización. Se relaciona con el campo de inducción magnética a través de la permeabilidad del medio.

carga eléctrica *f* Propiedad que tienen algunas partículas fundamentales, que les confiere la posibilidad de interaccionar con otras partículas que también tengan esta propiedad. La interacción es de tipo electromagnético.

conductor *m* Material en el que, a causa de la su estructura microscópica, puede haber cargas libres que en presencia de un campo eléctrico se verán afectadas de manera que el material será capaz de conducir corriente eléctrico.

corriente eléctrica *f* Movimiento aproximadamente continuo de cargas eléctricas por medio de un hilo, superficie o volumen.

densidad de carga *f* Cantidad de carga eléctrica por unidad de longitud, superficie o volumen cuando se encuentra distribuida a lo largo de una línea, superficie o volumen.

dieléctrico *m* Material en el que, a causa de su estructura microscópica, las cargas que hay están fuertemente unidas y no se pueden mover libremente.

energía electrostática *f* Energía debida a la presencia de un campo electrostático o a la presencia de cargas (estáticas) en una cierta región del espacio.

flujo de campo *m* Magnitud que mide la cantidad de líneas de campo que atraviesa una determinada superficie. Depende del valor del campo, del área de la superficie y de la orientación relativa entre estos dos elementos.

fem inducida *f* Diferencia de potencial o tensión que se genera en un circuito cerrado cuando el flujo de campo magnético que atraviesa la superficie imaginaria que dibuja es variable en función del tiempo. La fuerza electromotriz inducida también se puede generar sin la necesidad de un cable.
sin. **fuerza electromotriz inducida**

fuerza electromotriz inducida *f*
sin. **fem inducida**

fuerza electrostática *f* Fuerza que experimenta una carga o un sistema de cargas cuando se encuentra en una región donde existe un campo eléctrico.

fuerza magnética *f* Fuerza que experimenta una carga o un sistema de cargas en movimiento cuando se encuentra en una región donde existe un campo magnético.

histéresis magnética *f* Propiedad que tienen algunos materiales magnéticos, especialmente los ferromagnéticos, por la que las propiedades magnéticas de estos materiales dependen de su historia magnética.

imantación *f* Proceso por el que las corrientes microscópicas en un material magnético se orientan de la misma manera y provocan una reacción macroscópica en el material.

intensidad de corriente *f* Magnitud que indica la cantidad de carga que atraviesa una determinada superficie durante un cierto tiempo.

interacción electromagnética *f* Una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza.

líneas de campo *f pl* Líneas imaginarias que sirven para representar un campo y dar una idea cualitativa de su dirección e intensidad en cualquier punto de la región representada.

ley de Ampère-Maxwell *f* Ley que relaciona la circulación de un campo magnético a través de una línea cerrada con sus causas.

ley de inducción de Faraday *f* Ley que relaciona la variación de flujo magnético con la fuerza electromotriz inducida.

magnetización *f* Medida de la dirección y la intensidad, por unidad de volumen, de los momentos dipolares magnéticos inducidos por las partículas cargadas de los átomos de un material, como respuesta a un campo magnético externo.

material diamagnético *m* Material magnético que reacciona, en presencia de un campo magnético externo, de manera que se crea una magnetización muy débil y con sentido opuesto al del campo magnético aplicado.

material ferromagnético *m* Material magnético que reacciona, en presencia de un campo magnético externo, de manera que se crea una magnetización muy intensa y con el mismo sentido que el campo magnético aplicado. Los materiales ferromagnéticos, además, pueden presentar una magnetización remanente una vez desaparece el campo magnético externo y una cierta histéresis magnética.

material paramagnético *m* Material magnético que reacciona, en presencia de un campo magnético externo, de manera que se crea una magnetización muy débil y con el mismo sentido que el campo magnético aplicado.

permeabilidad magnética *f* Propiedad de los medios materiales que da cuenta de sus propiedades magnéticas. En el valor de la permeabilidad se concentran todos los efectos microscópicos relacionados con el campo magnético.

permitividad eléctrica *f* Propiedad de los medios materiales que da cuenta de sus propiedades eléctricas. En el valor de la permitividad se concentran todos los efectos microscópicos relacionados con el campo eléctrico.

onda *f* Perturbación que se propaga por el espacio y el tiempo, con transporte de energía pero sin transporte neto de materia.

onda electromagnética *f* Onda que propaga energía electromagnética.

polarización eléctrica *f* Efecto que se produce en un material dieléctrico debido a la orientación de los dipolos microscópicos que constituyen este material cuando se encuentra en una región donde existe un campo eléctrico.

potencial electrostático *m* Magnitud escalar que mide la energía por unidad de carga que hay en un cierto punto del espacio. Se puede considerar también como una función matemática que indica la energía "en potencia" de un punto del espacio.

teorema de Gauss *m* Teorema fundamental del electromagnetismo que relaciona el flujo de campo a través de una superficie cerrada con la carga que hay dentro de esta superficie. Cuando se trata de un campo magnético, el teorema de Gauss enuncia que este flujo debe ser cero, dado que no existen "cargas magnéticas".

Bibliografía

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1987). *Física. Electromagnetismo y materia* (vol. II). Pearson Addison Wesley.

Lorrain, P.; Corson, D. (1972). *Campos y ondas electromagnéticos*. Madrid: Selecciones Científicas.

Reitz, R.; Milford, F. J.; Christy, R. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Pearson Addison Wesley.

Sears, F. W.; Zemansky, M. W.; Young, H. D.; Freedman, R. A. (1996). *Física Universitaria* (11.ª ed., 2 vol.). Pearson Addison Wesley.

Wangsness, R. K. (1996). *Campos electromagnéticos* (1.ª ed.). México: Limusa.